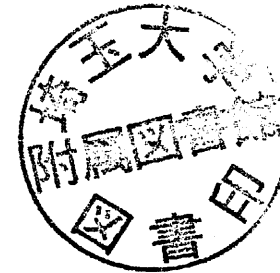
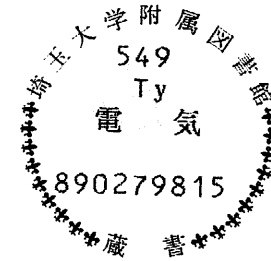


W/50/2  
J&T/Ty

# 超電導エレクトロニクス

東京大学工学部教授・工学博士 原 宏 編著  
大阪産業大学工学部教授・工学博士 藤澤和男  
広島大学理学部教授・理学博士 藤田敏三 共著  
N T T 厚木研究所・工学博士 石田 晶  
東京大学工学部助教授・工学博士 岡部 洋一



オーム社

## は し が き

最近5年間ほどの我が国における超電導エレクトロニクスの進歩は目覚ましい。この分野の出版物は1章の参考文献1)および2)に記したように内外にわたって多数あるが、本書は現時点での最新情報を、この分野の発展に中心的役割を果たしてきた研究者が集約し基礎から解説を加えたものである。

1962年、ジョゼフソン効果の予言とその実験的確認が引き金となって超電導エレクトロニクスの物理および技術開発の研究は飛躍的な展開を見せた。初期の基礎研究の段階から大幅な産業応用へと大幅な研究拡大の契機となったのはIBMの超高性能計算機のプロジェクトである。この計画の目標や成果は、1章の参考文献2)1.のH.H. Zappe (51ページ~127ページ)担当の項に詳細が述べられている。不幸にしてIBMの計画は約2年前に挫折した。しかし、超電導エレクトロニクスを中心として計算機を作るという彼らの評価や目標が誤っていたわけではない。目標に向けての歩幅がIBMにとってすら大きすぎたのである。我が国の研究者は早くからこれに気づいていたし、もちろん彼ら自身も気づいていたであろう。従って、IBMの鉛合金を基礎とする材料技術は、我が国ではニオブおよびニオブ化合物を中心とする高融点材料に面目を一新したし(5章参照)、IBMの電圧型論理とは別に我が国ではフラクソイド型論理の研究が盛んである(4章)。

本書では触れなかったが、超電導性そのものが複雑で、超電導性を外部信号で変調して増幅器など3端子デバイスを構成するとか、近接して接続されたジョゼフソン素子間の相互作用、つまりジョゼフソン素子アレーまたは結合ジョゼフソン素子の研究も盛んである。

もちろん、SQUIDとか電磁波検出とか信号処理等々といった基礎計測分野の発展はデジタル応用と相互依存の関係にある。この分野こそ半導体エレクトロニクスで達成できない超電導エレクトロニクス独特の領域であるといえる。それは、超電導電子の波動性を最も直接に利用するのがこの分野であるからである。

このように見てくると、超電導エレクトロニクスについて本書で記述されてい

本書は、著作権法(法律第48号)第六条によって、著作権および出版権が保護されている著作物です。

### ☆ 複写複製する場合の御注意

本書の内容の一部あるいは全部を、無断で、複写機等いかなる方法によっても複写複製すると、著作権および出版権の侵害となる場合がありますので御注意ください。特に、学校・企業・団体等において、講習会、研修会、その他の目的のために複写複製する場合や、データベースとして利用されるためにコンピュータに入力する場合には、著作権者(著作者)および出版権者(オーム社)の許諾を得ないかぎり、著作権および出版権の侵害となります。

### ☆ 他書へ転載する場合の御注意

本書の内容の一部を他書へ転載する場合には、著作権者(著作者)および出版権者(オーム社)の許諾を得ないかぎり、著作権および出版権の侵害となります。

☆ 本書の複写複製、および内容の一部の転載等についてのお問合せは下記をお願いします。

〒101 東京都千代田区神田錦町3-1

株式会社 オーム社出版部(著作権担当)

Tel.03-233-0641

る事柄はほんの入口にすぎない。超電導性のより深い理解を前提として背後には無限の宝庫がある。従って、本書を読まれる読者諸賢に希望を述べるとすれば、本書は超電導エレクトロニクスの完成された姿を記述するものではなく、将来に連なる大きな夢の入口付近の案内書であるということを理解していただきたい。

なお、全体の構成と配列については、基礎的事項を1章にまとめ、他の諸章への序章とし、読者の理解の便に注意したつもりであるが、用語や記号については必ずしも全章にわたって統一されているとはいえない。新しく発展した分野の常として執筆者はそれぞれ物理、電気、電子および計測などそれぞれの前歴を背景としているので、形式的統一よりは実質的な調和を尊重した結果である。わずかな形式的不統一の克服は読者諸賢に対して容易であるとの信頼の結果でもあるが、ここに怠慢をお詫びするしだいである。

1985年12月

原 宏

## 目 次

### 1章 超電導エレクトロニクスの基礎

1.1 超電導の電子状態	1
1.2 超電導現象	6
1.3 超電導体と磁束の侵入	16
1.4 トンネル効果	21
1.5 ジョゼフソン効果	24
1.6 ジョゼフソン接合を含む超電導回路	32
参考文献	45

### 2章 SQUID と低周波計測

2.1 超電導磁気センサの原理	47
2.2 SQUID 回路と素子パラメータ	59
2.3 SQUID の応用	72
2.4 周辺技術	82
参考文献	86

### 3章 超電導量子効果を用いる電磁波デバイス

3.1 ジョゼフソン電磁波検出器	89
3.2 SIS 準粒子電磁波検出器	112
3.3 ジョゼフソン発振器と増幅器	128
参考文献	137

4章 ジョゼフソン素子のデジタル応用	141
4.1 ジョゼフソンデジタル回路	149
4.2 電圧形論理回路	159
4.3 フラクソイド形論理回路	168
4.4 ジョゼフソンコンピュータおよびその他のデジタル応用	173
参考文献	
5章 ジョゼフソン集積回路	175
5.1 接合製作技術	182
5.2 集積化技術	192
5.3 集積回路の実際	204
5.4 コンピュータ構成技術	214
参考文献	
索引	217

## II 章 超電導エレクトロニクスの基礎

### 1.1 超電導の電子状態

#### 〔1〕超電導と波<sup>1)</sup>

超電導は巨視的量子現象と呼ばれる<sup>2)</sup>。いま、超電導体閉回路に永久電流が流れることやその閉回路に鎖交する磁束は、磁束量子 ( $\Phi_0 \equiv 2.07 \times 10^{-16}$  [Wb]) の整数倍であるという確立された事実を理解する簡単なモデルを示そう。

永久電流の担体は閉回路を1周、つまり曲線運動をしているから、電磁気学では電磁波を放出して運動は減衰する。一方、例えば水素原子など量子的電子系は、量子条件を満足する場合、定常状態、つまり一種の永久運動が許される。ではこの担体にボーアの量子条件を課してみよう。担体の電荷、質量および速度をそれぞれ  $e^*$ 、 $m^*$  および  $v$  とし、電磁界のベクトルポテンシャルを  $A$  とすれば、相当の運動量は  $p = m^*v + e^*A$  である。プランク定数を  $h$  としボーアの条件は

$$\oint p \cdot dl = \oint (m^*v + e^*A) \cdot dl = nh \quad (n: \text{整数}) \quad (1.1)$$

図1.1に示す超電導閉回路の断面中心部を通る一点鎖線の積分路を式(1.1)について考える。 $dl$ はこの積分路の線素片である。後に示すとおり超電導体は表面薄層 ( $\leq 0.1 \mu\text{m}$ ) しか電流は流れないから積分路に沿っては  $v=0$  である。一方、 $\text{rot } A = B$  ( $B$ は磁束密度) とストークスの定理を式(1.1)に適用し、積分路に鎖交する磁束を  $\Phi$  とすると ( $S$ は積分路を覆う面で  $dS$ はその面素片)

$$\Phi = \int_S B \cdot dS = n(h/e^*) \quad (1.2)$$

超電導の電流担体はクーパー対<sup>3)</sup>と呼ばれ、 $e^* = 2e$  ( $e$ は素電荷) であることが判明している。

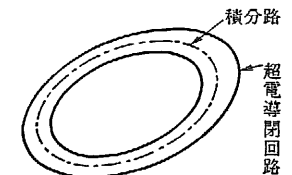


図 1.1 超電導閉回路と積分路

(注) 本章ではベクトル量は自明と考えて特別な記号を使用しない。

ゆえに  $h/2e = 2.07 \times 10^{-15} \text{ [Wb]} = \Phi_0$  であり、ボアの量子条件から式 (1.2) を導いたのは適切であった。ボアの量子条件は、波動像ではドブロイ波の位相が閉回路1周で  $2\pi$  の整数倍変化することである。ゆえにクーパー対に関してその運動を記述する超電導の波動関数を仮定することは妥当である。これを

$$\psi = |\psi| e^{i\theta} \quad (1.3)$$

と書く ( $i$  は虚数単位)。  $\psi$  は  $|\psi|^2$  がクーパー対の粒子密度  $n$  を与えるように規格化され、  $\psi = \sqrt{n} \exp(i\theta)$  と書いてもよい。  $\psi$  は超電導体内に存在する波で、粒子密度  $n$  は超電導性の強さを示し、温度、磁界、電磁波など外部変数により影響される。しかし、本書の大部分を占める位相の効果を論ずる応用では、  $n$  は外部変数の弱い変化に対しては一定と考えてよい。一方、位相  $\theta$  は外部変数に敏感に影響を受け、光の波と同様干渉とか回折の現象を示す。多数の電子が位相を共通にし、干渉などを示すこの性質を長距離秩序またはコヒーレンスを示すと呼んでいる。

(2) 超電導状態

長距離秩序とその電子状態についてその大要を記述しよう。秩序とは規則性の高い状態であり、式 (1.3) で示される多数の電子が位相をそろえた状態である。これは自由電子モデルとは異なり、電子間に相互作用 (引力) があり、系のエネルギー低下が起こる。この相互作用についてはクーパーが論じ、バーディーン・クーパー・シュリーファアの3名によるBCSの超電導理論<sup>4)</sup>が誕生した。

自由電子モデルでは、温度  $T=0$  [K] では電子はフェルミ波数  $k_F$  までの平面波準位を完全に埋めつくす。それが全エネルギー最低であるからである。クーパーはこの波数空間のフェルミ球モデルに波数  $k$  が  $k_F$  より上の準位に2個の電子を追加した人為的な系を想定しエネルギーを計算した。ところが2電子間に引力相互作用があれば、この人為系のほうが元の系よりエネルギーが低い結果を得た。  $k_F$  より大きな運動エネルギーを持つ2電子の追加にもかかわらず全系のエネルギーが低下するこの結果は、元の系に電子間引力相互作用があれば自由電子のフェルミ分布とは異なる分布の可能性を示唆した。このクーパー対モデルの2個の電子は束縛状態にあり、図1.2に示すように定在波動的な波束と理解される。波束の寸法は  $k_F$  や相互作用に常識的な値を用いると 0.1

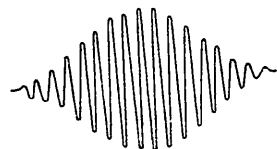


図 1.2 クーパー対の波束

$\mu\text{m}$  程度である。

引力相互作用の原因はフォノンを仲介とした間接的な電子間相互作用である。自由電子モデルでは、正イオン格子の空間を全体として電氣的に中和する数の電子が運動すると考える。イオン格子は、力学的には多数の固有振動モードを持つ。この振動を量子化したのがフォノンである。どのモードがどれだけの振幅を持つからフォノンがボーズ統計に従うことから求められる。ところで、電子がイオン格子空間を運動すれば相互引力により格子は振動し正電荷分布にむらを生ずる。このむらに他の電子が引き付けられる。結果は2電子間に引力が生じたと理解される。

以上をフォノンの描像で示したのが図1.3である。  $k_1$  電子がフォノン  $q$  を放出し、同時に  $k_2$  電子が  $q$  を吸収し、それぞれ  $k_1 - q$  と  $k_2 + q$  に散乱される。散乱時間  $\Delta t$  は極めて短く、この間のエネルギー不確定  $\Delta E$  はハイゼンベルグの不確定関係  $\Delta E \Delta t \geq \hbar$  により極めて大きい。従って、この散乱過程でエネルギー保存関係は必要なくエネルギー低下が可能である。このような役割のフォノンを仮想フォノンと呼ぶ。ただし、運動量は保存する。

電子分布に変化が起こるのは  $k_F$  のごく近くだけである。フォノンの最大エネルギーは  $k_B \theta_D$  ( $\theta_D$  はデバイ温度) 程度、すなわち  $\theta_D = 150$  [K] とすれば 13 meV 程度であり、フェルミエネルギーは eV のけたであるからである。従って、散乱の始状態も終状態もフェルミ面の  $k_B \theta_D$  に相当するごく薄い層内にある。この観点から散乱数が最大となるのは、散乱2電子の合成運動量  $K$  が  $k_1 + k_2 = (k_1 - q) + (k_2 + q) = K = 0$  の場合であることは図1.4からわかる。ゆえに  $(k_1, -k_1)$  の対が  $(k_2, -k_2)$  の対への散乱が実際に起こる。BCS理論は、この観点から全

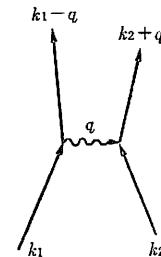


図 1.3  $k_1$  電子と  $k_2$  電子の仮想フォノン  $q$  による散乱

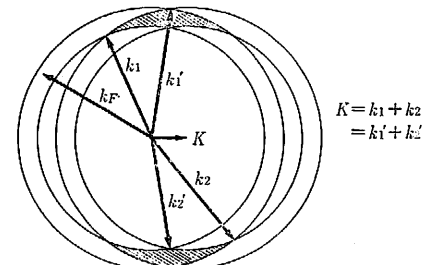


図 1.4 フェルミ面上  $k_B \theta_D$  の薄層内にクーパー対運動量  $K$  を保存して散乱可能な  $(k_1, k_2)$  の範囲 (斜線内)

電子系のエネルギーを極小化するものである。以下に理論の結果を要約する。

[3] BCS 理論による超電導の電子状態

(1)  $T=0$  [K] ですべての電子は  $(k, -k)$ , すなわちクーパー対を形成する。ゆえにクーパー対の運動量は零である。運動量空間でクーパー対が原点に集まる現象をボーズ凝縮と呼ぶ。

(2) 上記の状態を超電導の基底状態と呼ぶが、クーパー対を基底状態から励起するには  $2\Delta$  以上のエネルギーが必要である。即ち、励起電子（これを準粒子とか常電子と呼ぶ）1個あたり  $\Delta$  のエネルギーが最小限必要で、 $\Delta$  をギャップエネルギーないしはギャップパラメータと呼ぶ。つまり基底状態と励起状態の間には  $\Delta$  だけのエネルギーギャップがある。適当な近似の下で  $\Delta$  は

$$\Delta = 2\hbar\omega_D \exp(-1/N(0)V) \quad (1.4)$$

である。 $\omega_D$  はデバイ角周波数 ( $k_D\theta_D = \hbar\omega_D$ ),  $N(0)$  はフェルミエネルギーにおける状態密度,  $V$  はフォノンを仲介とした引力ポテンシャルである。 $\Delta$  は 1meV 程度である。

(3) 電子の運動量分布は、式(1.4)の  $\Delta$  を用いて

$$f_k = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\epsilon}{\sqrt{\Delta^2 + \epsilon^2}} \right], \quad \left( \epsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - E_F \right) \quad (1.5)$$

となる。 $E = \sqrt{\Delta^2 + \epsilon^2}$  は波数  $k$  のクーパー対の励起に必要な励起エネルギーで図 1.5 に示した。 $k < k_F$  なら励起はホールの,  $k > k_F$  なら電子的である。図 1.6 に  $f_k$  を示した。 $f_k$  はフェルミ分布と  $k_F$  を中心とした狭い範囲で一致しない。このずれの分だけ基底状態の電子系の運動エネルギーはフェルミ分布よりも大きい。

(4) 基底状態の系のエネルギーを  $W_s$ , 常電導のままのそれを  $W_n$  とすると

$$W_s - W_n = -\frac{1}{2} N(0) \Delta^2 \quad (1.6)$$

である。図 1.6 の分布変更に伴う運動エネルギー増加は

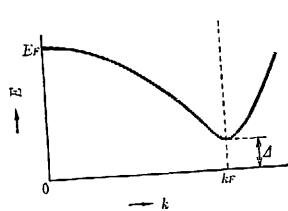


図 1.5 クーパー対の励起エネルギー

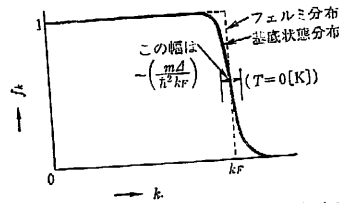


図 1.6 超電導基底状態の占有確率

$$(KE)_s - (KE)_n = \frac{\Delta^2}{V} - \frac{1}{2} N(0) \Delta^2 \quad (1.7)$$

であるから、凝縮した結果のポテンシャルエネルギーの減少は  $\Delta^2/V$  である。

(5) ギャップパラメータ  $\Delta$  は温度依存性がある。これを決定する式は

$$\frac{1}{N(0)V} = \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} \frac{\tanh(E/2k_B T)}{2E} \cdot d\epsilon \quad (1.8)$$

である。励起エネルギー  $E$  に含まれる  $\Delta$  は、温度依存性を示すため  $\Delta(T)$  と書き直す。式(1.8)で求めた  $\Delta(T)$  を図 1.7 に示した。 $T=T_c$  近傍では

$$\Delta(T) = 3.2 k_B T_c (1 - T/T_c)^{1/2} \quad (1.9)$$

と近似される。 $\Delta(T_c) = 0$  であるから、式(1.8)にこれを代入して

$$\frac{1}{N(0)V} = \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{\tanh(\epsilon/2k_B T_c)}{\epsilon} \cdot d\epsilon \quad (1.10)$$

$k_B T_c \ll \hbar\omega_D$  ( $N(0)V \ll 1$  に相当) のとき上式は

$$k_B T_c = 1.13 \hbar\omega_D \exp(-1/N(0)V) \quad (1.11)$$

これを式(1.4)と比較して

$$2\Delta(0) = 3.52 k_B T_c \quad (1.12)$$

$T=0$  [K] の  $\Delta$  と臨界温度  $T_c$  は比較的正確に測定可能な量で、式(1.12)は BCS 理論の検証となる。式(1.12)は  $\Delta(0)/T_c$  は物質の種類によらないことを意味しているが、これは大勢として実験的にも正しい。

(6) 励起状態の状態密度  $N_s(E)$  はフェルミエネルギーの近くで近似的に

$$N_s(E) = \frac{N(0)E}{(E^2 - \Delta^2)^{1/2}} \quad (1.13)$$

となる。図 1.8 にはこれを示したが、上半は  $k_F$  以上に励起される電子的励起、

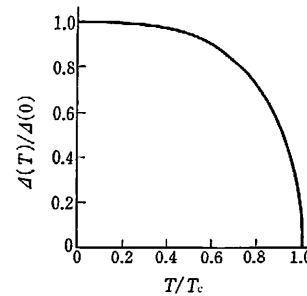


図 1.7 エネルギーギャップの温度依存性

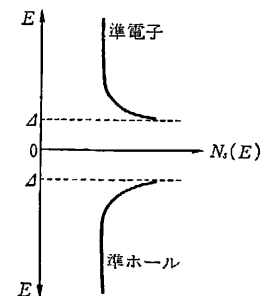


図 1.8 準粒子の励起の状態密度

1章 超電導エレクトロニクスの基礎

下半は  $k_F$  以下に励起されるホール状励起を示し、励起エネルギーは0を中心にして上下ともに正である。  $T \neq 0$  [K] のときは  $\Delta(T)$  を式 (1.13) に用い、フェルミ分布を乗ずることにより励起数を求めることができる。

(7) クーパー対の寸法は材料に依存するが  $0.1 \mu\text{m}$  程度以下で、コヒーレンス長さとも呼ばれる。直径  $\xi$  の球内には100万個程度のクーパー対が格子振動と相互作用して共存する。このように全クーパー対が同期し超電導体内部に広がったのが式 (1.3) の波動関数である。温度の上昇によりクーパー対の一部は準粒子となりクーパー対と平衡を保っている。

1.2 超電導現象

(1) 完全導電性とマイスナー効果

4.2 K 直下で水銀が急激な抵抗減少するのを1911年にオネスが見いだした。これを完全導体と理解することは、その後マイスナーの実験<sup>9)</sup>で否定された。常電導からこの超電導に転移する温度を臨界温度  $T_c$  と呼ぶ。一般に温度  $T$  を  $T_c$  で規格化し、 $t = T/T_c$  を換算温度または正規化温度と呼ぶ。完全導体 (導電率  $\sigma = \infty$ ) では  $\dot{B} = 0$  である ( $\dot{B} = -\text{rot } E = 0$ )。ゆえに図 1.9

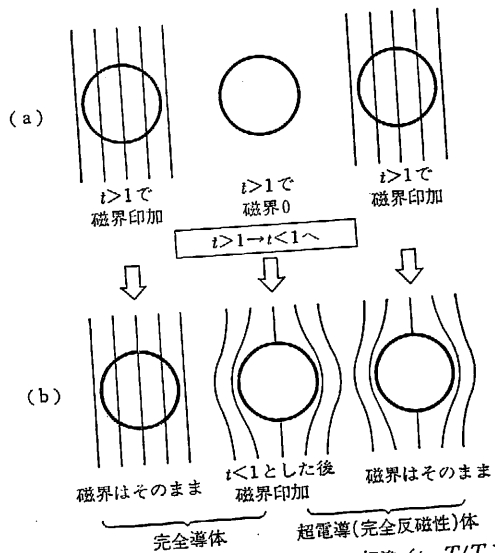


図 1.9 完全導体と超電導体の磁化の相違 ( $t = T/T_c$ )

(a) および (b) に示すように、 $B$  の初期条件により  $t > 1$  から  $t < 1$  に温度を下げた磁化状態が異なる。ところで1933年のマイスナーの実験によれば、初期条件によらず超電導状態では  $B = 0$  であった。これをマイスナー効果と呼び、この性質を完全反磁性と呼ぶ。すなわち、完全導体では外部変数である温度と磁界を指定しても磁化状態は一義的ではないが、超電導体では一義的に  $B = 0$  である。このことから超電導体は熱力学的取扱いが可能である。

ある限界  $H_c$  (これを臨界磁界と呼ぶ) 以上の外部磁界では常電導に転移する。そして  $H_c$  は式 (1.14) のように温度に依存する (これは実験式である)。

$$H_c(T)/H_c(0) = (1-t^2) \quad (1.14)$$

図 1.10 に示した曲線の原点側が超電導 (S 相)、外側が常電導 (N 相) で、状態  $P_1$  から  $P_2$  への移行はコース (1), (2) のいずれをたどっても結果は同じである。

(2) 磁化

$$\text{rot}(B/\mu_0 - M) \equiv \text{rot } H = \frac{\partial D}{\partial t} + J_{\text{ext}} \quad (1.15)$$

と書いた  $M$  が物質の磁化で、外部磁界に対する物質の磁気的変化を示す。  $J_{\text{ext}}$  は外部電流である。式 (1.15) を次式 (1.16) で  $J_{\text{int}}$  を定義すると

$$\text{rot } M = J_{\text{int}} \quad (1.16)$$

$$\text{rot } B/\mu_0 = \frac{\partial D}{\partial t} + J_{\text{ext}} + J_{\text{int}} \quad (1.17)$$

を得る。磁界に対する物質の応答を磁氣的に記述する立場では式 (1.15) が便利であるし、その応答が物質内部の応答電流に起因すると考え得る場合は式 (1.17) の記述が便利である。超電導の場合  $J_{\text{int}}$  はその表面のみを流れて内部磁束密度  $B$  を零に保つ (マイスナー効果) と考えて  $J_{\text{int}}$  を遮へい電流と呼ぶ。図 1.11 は超電導体の磁化特性を示したもので、 $H < H_c$  以下で  $M = -H$ , すなわち  $B = 0$ , すなわちマイスナー効果を示している。

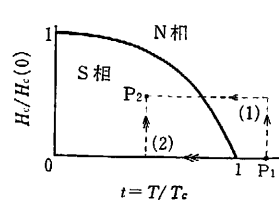


図 1.10 超電導体の磁化は磁化過程に依存しない

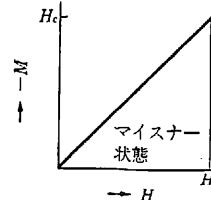


図 1.11 反磁界係数が0である第一種超電導体の磁化特性

磁化測定にあたっては反磁界効果についての注意が重要である。外部磁界は一樣と仮定したとき試料内部の磁化が一樣でないとい図1.11のような明確に定義された特性が得られない。回転軸に平行な一樣な外部磁界  $H_0$  で磁化された回転円筒体の内部磁界  $H$  は一樣で

$$H = H_0 - DM \quad (1.18)$$

と表わせ、 $D$  を反磁界係数と呼ぶ。 $a/b$  と  $D$  の関係を図1.12に示す。ゆえに磁化測定には正しくは回転円筒体を用いるが、 $a \gg b$  なら  $D \ll 1$  で細長い円筒試料で近似できる。また、へん平で  $a \ll b$  なら  $D = 1 - \pi(a/2b)$  で薄板で近似できる。 $H = B/\mu_0 - M$  と式(1.18)を用いて

$$H = (H_0 - DB/\mu_0)/(1-D) \quad (1.19)$$

であるが、超電導体では  $B=0$  であるから  $H = H_0/(1-D)$ 、すなわち超電導試料では内部磁界は外部磁界より常に大で、特に  $D \sim 1$  の場合は非常に大きい。図1.10や図1.11の結果は細長い試料での実験結果と理解すべきである。

### (3) 熱力学的関係

図1.10の相図で相界を示す曲線に沿っては超(S)常(N)両相のギブスの自由エネルギー  $G_s(T)$  と  $G_n(T)$  は等しい。すなわち

$$G_n(T, H_c) = G_s(T, H_c) \quad (1.20)$$

$G$  は温度 ( $T$ )、磁界 ( $H$ ) および圧力 ( $p$ ) の熱力学変数の変化に対し  $dG = -SdT - BdH + Vdp$  (記号は通常どおり) であり、固体では  $dp=0$  を仮定してよいから、相界に沿っての  $G$  の微小変化に対しては

$$S_n - S_s = -\mu_0 H_c \left( \frac{dH_c}{dT} \right) \quad (1.21)$$

を得る。式(1.14)や図1.10から  $(dH_c/dT) \leq 0$  であるから常電導相のエントロピー  $S_n$  は超電導相のエントロピー  $S_s$  より大きい。すなわち、超電導相はより秩序の高い状態であり、それは1.1節で述べた凝縮状態である。超常転移の潜熱  $L_{sn} = T(S_n - S_s)$  は一般に正である。 $T = T_c$ 、従って  $H_c = 0$  のときは  $L_{sn} = 0$  である。また、 $T=0$  では  $(dH_c/dT) \rightarrow 0$  でやはり  $L_{sn} = 0$  である。比熱  $C$  は  $C$

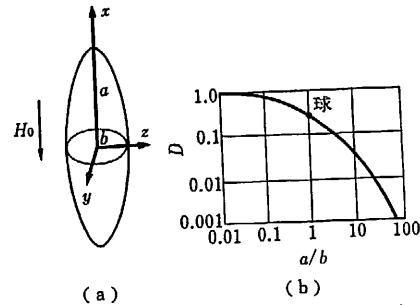


図1.12 回転円筒体の極軸に平行に磁界を加えたときの反磁界係数  $D$  と  $a/b$  の関係

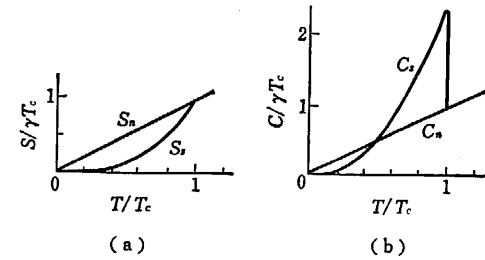


図1.13 超電導体と常電導体のエントロピーおよび比熱の温度依存性の比較 ( $\gamma$  は電子比熱の係数)

$= T(dS/dT)$  であるから

$$C_s(T_c) - C_n(T_c) = \mu_0 T_c \left( \frac{dH_c}{dT} \right)_{T=T_c}^2 \quad (1.22)$$

となり、 $T = T_c$  で超常両相のエントロピー差は0であるが、比熱は不連続である。すなわち、S-N 転移は  $T = T_c$  で二次である。以上の関係を図1.13に示した。

以上の議論は電子に関するものであるが、格子比熱  $C^L$  は  $T \ll \theta_D$  では  $C^L \propto (T/\theta_D)^3$  であって一般に無視できる。超電導では  $T=0$  近傍で比熱が極めて小さく、 $T = T_c$  近傍で急激に大きくなるのは電子の状態密度 (図1.5および図1.8) にギャップがあることおよびギャップの温度依存性 (図1.7) を考えると理解しやすい。実際ギャップの存在は当初比熱の測定から推論され、その後電磁波に対する光電効果や次節で述べるトンネル実験によりより直接的に実証されることとなった。

### (4) ロンドンの方程式

超電導体の電磁気学として1930年代にロンドン兄弟が導入した電流と電界、磁界の特性に関する物質方程式をロンドン方程式<sup>9)</sup>と呼ぶ。

式(1.3)を  $\psi = \sqrt{n_s} \exp(i\theta(r))$  と書き、クーパー対流体の運動量密度を  $n_s \mathbf{p} = n_s (m^* \mathbf{v} + e^* \mathbf{A})$  と書く。運動量演算子  $-i\hbar \nabla$  の期待値は  $n_s \mathbf{p}$  であるから

$$n_s \mathbf{p} = \langle \psi | -i\hbar \nabla | \psi \rangle = \hbar n_s \nabla \theta \quad (1.23)$$

$\mathbf{J}_s = n_s e^* \mathbf{v}$  であるから  $\mathbf{p} = \hbar \nabla \theta = e^* \mathbf{A} J_s + e^* \mathbf{A}$  ( $\mathbf{A} = m^* / n_s e^{*2}$ ) であり、この式の両辺の  $\text{rot}$  を取り  $\text{rot} \nabla ( ) = 0$  および  $\text{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}$  を用い

$$\mathbf{A} \text{rot} \mathbf{J}_s + \mathbf{B} = 0 \quad (1.24)$$

を得る。これが電流と磁界の関係を示すロンドンの第二方程式である。

クーパー対の運動は損失がないから  $m^*dv/dt=e^*E$  であり、 $v$  の空間変化が無視できれば  $dv/dt=\partial v/\partial t$  である。 $v$  を  $J_s$  に書き替えると

$$A \frac{\partial J_s}{\partial t} = E \tag{1.25}$$

を得る。これが電流と電界の関係を与えるロンドンの第一方程式である。

ロンドンの両方程式とマクスウェル方程式を組合せて超電導の問題に適用することは現在でもよく用いられる。ただし限界はある。 $J_s$  は  $v$  を書き替えたものであるが、 $v$  はそれを知りたい時刻以前に経験した場所の電磁界に依存するがロンドン方程式では  $J_s$  はその時点の場所の電磁界のみに依存する。ロンドン方程式のこの立場を局所的であると呼ぶ。

〔5〕 ロンドンゲージ

静電およびベクトルポテンシャル  $\Phi$ ,  $A$  はスカラー関数  $\chi$  を用いて

$$A' = A + \nabla\chi; \Phi' = \Phi - \partial\chi/\partial t \tag{1.26}$$

と変換 (ゲージ変換と呼ぶ) しても

$$E = -\nabla\Phi - \partial A/\partial t; B = \nabla \times A \tag{1.27}$$

から求まる  $E$  と  $B$  に変化はない。つまりゲージ  $\chi$  だけ両ポテンシャルは不定である。

式 (1.24) は  $\text{rot}(A + AJ_s) = 0$  であるから、超電導体表面での  $A + AJ_s$  の法線成分を指定すれば解は確定する。この値を 0 に選んだのがロンドンゲージであり

$$AJ_s = -A \tag{1.28}$$

が成立する。これはロンドンゲージを用いた第二方程式の解であり、式 (1.28) そのものをロンドンの第二方程式と呼ぶ場合もある。

〔6〕 ピッパードの考えとコヒーレンス長さ

ピッパードは電流-磁界関係の式 (1.28) の代わりに次式を用いることを提案した<sup>1)</sup>。

$$J_s(r) = (-) \frac{3}{4\pi\epsilon_0 A} \int_{V'} \frac{(r-r')[(r-r') \cdot A(r')] \exp[-(r-r')/\xi]}{|r-r'|^4} \times dV' \tag{1.29}$$

これは  $J_s$  が求める点  $r$  の周囲  $\xi$  程度の範囲のベクトルポテンシャルの荷重平均であることを意味し異常表皮効果との類推から導いた。 $\xi$  をコヒーレンス長

さ、 $\xi_0$  を真性コヒーレンス長さと呼ぶ。式 (1.24) または式 (1.28) が局所的であるのに対し、式 (1.29) の電流-磁界関係を非局所的であるという。ロンドンの考えにはクーパー対の大きさが超電導現象に関与するかどうかの考慮が入っていない。この間に対する一つの回答がピッパードの関係である。超電導体内では、磁界は侵入深さ  $\lambda$  (本節〔8〕項参照) を目安として変化するから  $\xi$  と  $\lambda$  の大小関係は電流-磁界関係に影響を持つ可能性がある。

$\xi$  の材料依存性としてピッパードは経験則として次式を提案した。

$$1/\xi = 1/\xi_0 + 1/\alpha l \tag{1.30}$$

$l$  は電子の平均自由行程、 $\alpha$  は 1 程度の定数であり、微視理論によれば  $\xi_0$  は

$$\xi_0 = 0.18 \hbar v_F / k_B T_c \tag{1.31}$$

である。 $v_F$  はフェルミ速度である。

〔7〕 2流体モデル

ロンドン方程式はクーパー対流体 (超流体) のみを扱っている。有限温度では励起された準粒子流体 (常流体) もあるから、両流体が相互浸透したモデルで超電導現象を扱うモデルを 2 流体モデルと呼ぶ。すなわち、超流体粒子および常流体粒子に対しそれぞれ  $m(dv_s/dt) = -eE$  および  $m(dv_n/dt) + m(v_n/\tau) = -eE$  の運動方程式を考える ( $\tau$  は運動量緩和時間)。それぞれの粒子密度を  $n_s$  および  $n_n$  として  $J_s = -n_s e v_s$  および  $J_n = -n_n e v_n$  を超常電流密度とする。この考えの下で正弦波定常応答を考えると

$$\left. \begin{aligned} J &= J_n + J_s = (\sigma_1 - j\sigma_2)E \\ \sigma_1 &= \frac{n_n e^2 \tau}{m(1 + \omega^2 \tau^2)}, \quad \sigma_2 = \frac{n_s e^2}{m\omega} + \frac{n_n e^2 (\omega\tau)^2}{m\omega(1 + \omega^2 \tau^2)} \end{aligned} \right\} \tag{1.32}$$

を得る。これを等価回路表示し、のが図 1.14 である。 $\sigma_2$  の第 1 項は超流体の、第 2 項は常流体のコンダクタンス (それぞれを  $\sigma_{2s}$ ,  $\sigma_{2n}$  で表示した)。

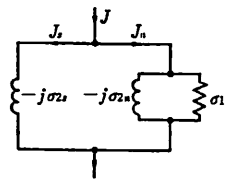


図 1.14 超電導体単位立方体のアドミタンス等価回路 (2 流体モデル)

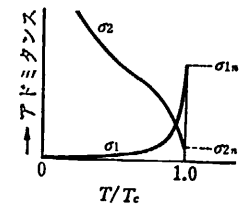


図 1.15 アドミタンス要素の温度依存性

2流体モデルの提唱者ゴータとカシミールは  $n = n_s + n_n$  として

$$n_s/n = 1 - (T/T_c)^4 \quad (1.33)$$

の温度依存性を与えた<sup>9)</sup>。これにより2流体モデルによる複素導電率の温度依存性を求めたのが図1.15である。2流体モデルは現象論であるが、電気回路の動特性などの計算が実行できるのでしばしば実用される。

〔8〕 ロンドン方式、2流体方式の計算例

(1) 図1.16の半無限超電導体の表面に平行に外部磁界  $B_0$  を加えた場合を扱う。今は超電流成分  $J_s$  のみを考えればよい。  $\text{rot } H = J_s$  の  $J_s$  に式(1.28)を代入し、両辺の  $\text{rot}$  を取り、ベクトル恒等式と  $\text{div } B = 0$  を用いて

$$\nabla^2 B = (1/\lambda_L)^2 B; \lambda_n^2 = m^*/\mu_0 \tilde{n}_s^* e^2 \quad (1.34)$$

を得る。同様に  $\nabla^2 J_s = J_s/\lambda_L^2$ ,  $\nabla^2 A = A/\lambda_L^2$  である。図は一次元問題であり  $\nabla^2 \rightarrow d^2/dy^2$  であり  $y \rightarrow \infty$  で収束する解として  $B_x = B_0 \exp(-y/\lambda_L)$ ,  $J_{s,x} = -(B_0/\lambda_L \mu_0) \exp(-y/\lambda_L)$  を得る。いずれにしても超電導電流や磁束は表面の  $\lambda_L$  程度の薄層内のみ存在する。この  $\lambda_L$  をロンドンの侵入深さと呼ぶ。式(1.34)で与えられる  $\lambda_L$  は定量的には妥当ではないが、一般に  $\lambda$  を侵入深さの記号として用いる。

上で求めた  $J_{s,x}$  は表面から  $\lambda_L$  よりはるかに深い場所では  $-B_0$ 、つまり外部磁界を打ち消す磁界を作る。この意味で  $J_{s,x}$  は遮へい電流であり、 $J_{s,x}$  の作る磁化が図1.11に示すマイスナー効果を示すのである。

図1.17(a)は円筒試料の軸方向に外部磁界を、(b)は同じく軸方向に(輸送)電流を流した場合を示した。いずれにしてもマイスナー効果は試料表面の侵

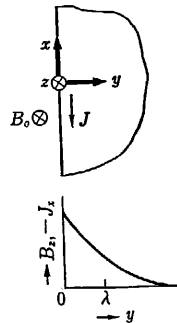


図1.16 半無限超電導体の遮へい

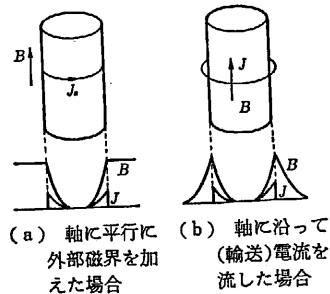


図1.17 円筒超電導体の遮へい

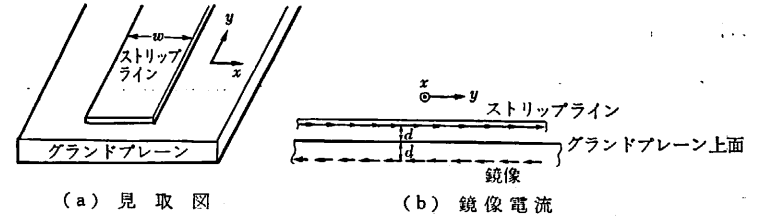


図1.18 グランドプレーン上のストリップに電流を流したときの鏡像電流

入深さ程度では不完全である。

(2) 厚い超電導体平板上にそれと平行な  $y$  方向の超電導ストリップに電流を流したのが図1.18である。超電導体表面で  $B$  は表面に平行であり、これを境界条件として採用できる。すると厚板表面に関しストリップと対称で逆方向の電流を鏡像として考えると境界条件を満足することがわかる。この厚板を通常グランドプレーンと呼ぶ。実際はグランドプレーン表面の遮へい電流の表面上部に作る磁束が鏡像電流の作るそれと等しいのである。ストリップ電流と鏡像電流を対にして考えるとストリップとグランドプレーン間の空間は、磁束は表面にほぼ平行で、それ以外の空間にはほとんど磁束が通らない。従って、グランドプレーンの存在によりストリップのインダクタンスは減少する。このように電流の近くに超電導体があると磁気エネルギーを蓄える空間を減少させる。

さて、図1.18でグランドプレーンが半無限で、ストリップには全電流  $I$  が  $y$  方向に一様密度で流れているとしよう。上の議論は  $w/d \rightarrow \infty$  でストリップの  $x$  方向中央に関してであるが、 $x$  方向の端部近くは磁界に乱れを生じ図1.19のようになる。 $B_0$  はストリップ幅中央部の磁束密度で  $B_0 = \mu_0 \kappa (I/w)$  である。 $\kappa$  は  $w/d$  に依存し図1.20のように変化する補正係数である<sup>9)</sup>。

(3) 金属中の電子が散乱を全く受けない場合、角周波数  $\omega$ 、振幅  $E$  の交流電界に対する電流密度は  $J = -j(ne^2/\omega m)E$  であり、電流は電界と直角相である。2流体モデルの超流体はこれに相当しインダクタンスを呈する。しかし、これは電子の慣性に基づくもので磁界のエネルギーを蓄えない。これを力学的インダクタンスと呼ぶ。

さて、図1.18でストリップラインのインダクタンスを  $L$  とすると

$$\frac{LI^2}{2} = \frac{1}{2\mu_0} \int_V [B^2 + \mu_0 \lambda^2 J_s^2] dV \quad (1.35)$$

が電流  $I$  によるエネルギーである。 $B^2$  に関する積分が磁界エネルギー、 $J_s^2$  に

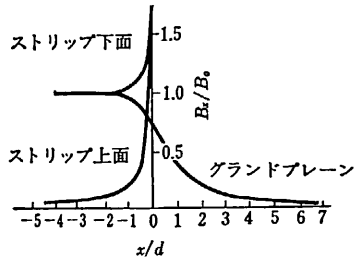


図 1.19 グランドプレーン上のストリップ電流による各部の磁束密度  $B_z$  の  $x$  方向分布

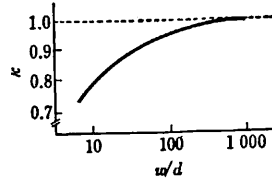


図 1.20 グランドプレーン上のストリップ電流によるストリップ下面中央の磁束密度  $B_0$  に対する補正係数  $\kappa$  ( $B_0 = \mu_0 \kappa (I/w)$ )

関する積分が電子の慣性による部分である。Bには前項(2)の値を用い、積分範囲は両超電導体およびそれらの間の空間として近似すると

$$L = \frac{\mu_0 d \kappa}{w} \left( 1 + \frac{\lambda_1}{d} + \frac{\lambda_2}{d} \right) \quad (1.36)$$

$\kappa$  は図 1.20 の値、インダクタンスは単位長あたりの値である。 $\lambda_1$  と  $\lambda_2$  はそれぞれストリップラインおよびグランドプレーン材料の侵入深さである。上式はそれぞれの膜厚が侵入深さより十分厚い場合の近似で力学的インダクタンスは無視されたが、薄い場合はそれを無視できない。

図 1.21 のようにグランドプレーン上  $d$  のリング状超電導薄膜では

$$L = \frac{2\pi r \mu_0 d \kappa}{w} \left( 1 + \frac{\lambda_1}{d} + \frac{\lambda_2}{d} \right) \quad (1.37)$$

と式 (1.36) を用いて近似される。ただし、 $w \ll r$  を仮定している。

(4) 図 1.18 の構造はストリップ電流と鏡像電流が対をなし伝送線となっている。図 1.22 の構造の伝送線としての特性をまとめて示す。 $\epsilon$  は絶縁膜の誘電率である。超電導体は完全導体ではなく交流に対しては損失を示すから厳密では

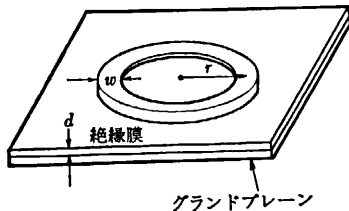


図 1.21 グランドプレーン上の超電導薄膜リング

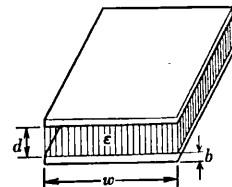


図 1.22 平行板超電導伝送線

ないが、ほとんど正確に TEM 解が存在する。この近似での等価回路を図 1.23 に示す。ゆえに伝播定数  $\gamma$ 、特性インピーダンス  $Z_0$  および単位長あたりのインピーダンス  $R + j\omega L$  はそれぞれ

$$\gamma = \alpha + j\beta = [(R + j\omega L)(G + j\omega C)]^{1/2} \quad (1.38)$$

$$Z_0 = [(R + j\omega L)/(G + j\omega C)]^{1/2} \quad (1.39)$$

$$R + j\omega L = (2Z_c/w) + j\omega L_{ext} \quad (1.40)$$

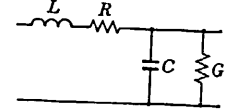


図 1.23 伝送線単位長の等価回路

と書かれる。 $L_{ext}$  は導体外の磁界エネルギーによるインダクタンスで、式 (1.36) の第 1 項による部分、 $Z_c$  は 2 流体モデルに基づく両導体の表面インピーダンス  $Z_s$  と式 (1.36) の第 2 項、第 3 項による部分の合計である。式 (1.32) を  $\omega\tau \ll 1$  の場合に近似すると (一般に  $f \leq 10^{11}$  [Hz]),  $Z_s = (j\omega\mu_0/\sigma_{eff})^{1/2}$  と書ける。 $\sigma_{eff}$  および  $Z_s$  の近似式およびこれらから求めた  $R + j\omega L$  を以下に示す。

$$\sigma_{eff} = \sigma_1 - j\sigma_2 = \sigma_n(n_n/n) - j(1/\omega\mu_0\lambda^2) \quad (\sigma_n = ne^2\tau/n) \quad (1.41)$$

$$Z_s = (\omega^2\mu_0^2\lambda^3 n_n \sigma_n / 2n) + j\omega\mu_0\lambda = R_s + j\omega L_s \quad (1.42)$$

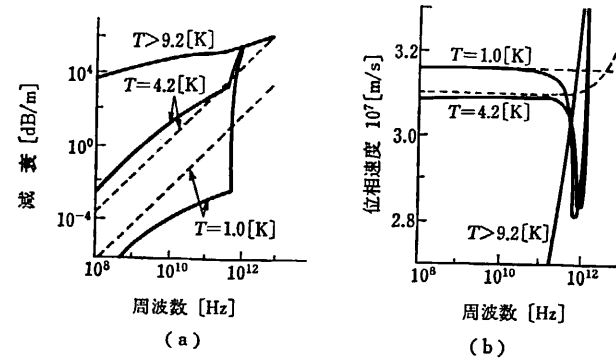
$$R + j\omega L = (\omega^2\mu_0^2\lambda^3 n_n \sigma_n / nw) + j[\omega\mu_0(d + 2\lambda)/w] \quad (1.43)$$

一般に  $G$  は無視できるから

$$\gamma = \left[ -\omega^2\mu_0\epsilon \frac{d + 2\lambda}{d} + j \frac{\omega^3\mu_0^2\epsilon\lambda^3 n_n \sigma_n}{nd} \right]^{1/2} \quad (1.44)$$

従って、波の位相速度  $v = \omega/\beta$  および群速度  $v_{gr} = \partial\omega/\partial\beta$  は

$$v = v_{gr} = (\mu_0\epsilon)^{-1/2} [1 + (2\lambda/d)]^{-1/2} \quad (1.45)$$



— : BCS 理論の計算, - - - : 2 流体モデルの計算  
図 1.24 Nb-Nb<sub>2</sub>O<sub>5</sub>-Pb-In の平行板超電導伝送線の特徴

となる。以上では一貫して  $b \gg \lambda$  の場合に議論を限った。膜厚が薄いと速度は遅くなる。以上のように超電導伝送線では表面インピーダンスが重要であると同時に、速度が自由空間より相当遅い。それは静電エネルギーを蓄える空間と磁気エネルギーを蓄える空間の比  $(d/d+2\lambda)$  の平方根に比例する。

ここに示した問題は、より正確と思われるBCS理論による計算も実行された<sup>10)</sup>。図1・24は両者の比較である。この例ではグランドプレーン側がニオブ(Nb)、上部電極が鉛とインジウム合金で、絶縁膜は  $Nb_2O_5$  である。 $Nb_2O_5$  の誘電率は極めて大きく  $\epsilon_r=29$  である。

### 1.3 超電導体と磁束の侵入

#### [1] 磁束の侵入

ここまで超電導体はマイスナー効果を示し、内部から磁束を排除するものとしてきた。しかし、凝縮エネルギーから予想される臨界磁界(これを熱力学的臨界磁界と呼ぶ)より相当低い磁界でも超電導体に磁束侵入が起こることがある。

磁束侵入は二つのタイプに分かれる。第一は試料形状に原因があり、反磁界が大きく外部磁界よりも内部磁界が大きくなる。この原因で磁束侵入が起きた状態を中間状態と呼ぶ。第二は試料が均一で反磁界係数が0でも熱力学的臨界磁界以下で磁束侵入が起きる材料の性質に依存する場合で、これを混合状態と呼ぶ。磁束侵入の起きた超電導体内部ではいずれにしても超常両相の界面があり、この界面は界面エネルギーを持つ。混合状態は界面エネルギーが負で界面の存在により全系のエネルギー低下が起きる。従って、磁束侵入が細かい単位で起きる。界面エネルギーが負の材料を第二種超電導体、正の材料を第一種超電導体と区別する。

反磁界係数が  $D$  の回転円体試料(第一種)の磁化特性を図1・25に示す。印加磁界が  $H_0$  のとき赤道面上の表面磁界は  $H_0/(1-D)$  である。ゆえに  $H_0=H_c/(1-D)$  に達するとその部分から常電導に転移しはじめる。その結果、実質超電導部の反磁界係数が低下する。この過程が継続的に起こり超電導部が

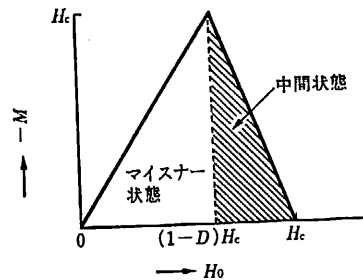


図1・25 反磁界係数  $D$  の第一種超電導体の磁化特性

完全に消滅するのは  $H_0=H_c$  を超えたときである。中間状態は超常界面エネルギーが正の場合に起こり、界面が少なくなるよう磁束侵入のパターンが起こるのでパターンは粗い。

#### [2] G-L 理論の考え方

超電導状態は常電導状態よりも秩序が高い。式(1.3)の  $\psi$  はこの秩序を示すものと理解でき、ギンツブルグとランダウはこれに秩序パラメータの名を与えG-L理論を建設した<sup>11)</sup>。超電導状態ではポテンシャルエネルギーは減少しているが、運動エネルギーは増加している。G-L理論ではこれを考慮してギブスの自由エネルギー密度を

$$g_s = g_{n_0} + \Delta f(|\psi|^2) + \frac{1}{2m^*} |(i\hbar\nabla + e^*A)\psi|^2 + \frac{b^2}{2\mu_0} - bH \quad (1.46)$$

$$\Delta f(|\psi|^2) = \alpha(T)|\psi|^2 + \frac{1}{2}\beta(T)|\psi|^4 \quad (1.47)$$

$g_{n_0}$  は同じ物質の同じ温度、零磁界下での常電導状態のギブスの自由エネルギー密度、 $\Delta f$  の項は  $n_s=|\psi|^2$  に依存したポテンシャルエネルギー密度の低下で  $|\psi|^2$  のべき幅級数を  $|\psi|^4$  で打ち切っている。第3項は運動エネルギーの期待値の演算子表現である。第4項以下の  $b$  は超電導体内部の局所的磁束密度  $b(r)$  である。巨視的な磁束密度は  $b(r)$  を侵入深さよりも大きい面積について平均してそれを  $B$  とする。第4項はマイクロな磁界エネルギー、第5項はヘルムホルツの自由エネルギーをギブスの自由エネルギーに変換するための項である。 $\alpha(T)$ 、 $\beta(T)$  は  $\Delta f(|\psi|^2)$  が平衡値  $|\psi_0|^2$  で極小になることを凝縮エネルギーが  $\mu_0 H_c^2(T)/2$  であることから決定できる。

$$\alpha(T) = -\frac{\mu_0 H_c^2(T)}{|\psi_0(T)|^2}, \quad \beta(T) = \frac{\mu_0 H_c^2(T)}{|\psi_0(T)|^4} \quad (1.48)$$

式(1.46)を  $A$  および  $\psi$  の汎関数として両者に関し最小とするためには

$$-J_s = \frac{\nabla^2 A}{\mu_0} = \frac{ie^*\hbar}{2m^*} (\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) + \frac{e^{*2}}{m^*} |\psi|^2 A \quad (1.49)$$

および

$$\alpha(T)\psi + \beta|\psi|^2\psi + (1/2m^*)(i\hbar\nabla + e^*A)^2\psi = 0 \quad (1.50)$$

を得る。 $J_s$  は電流密度である。 $A$  および  $\psi$  の境界条件はそれぞれ

$$(\nabla \times A)_z = \mu_0 H_{0z} \quad (1.51)$$

および

$$n \cdot (i\hbar\nabla + e^*A)\psi = 0 \quad (1.52)$$

添字  $i$  は表面に平行な成分を,  $n$  は法線ベクトルを示す. 以上の諸式を見ると自由エネルギーや  $\psi$ ,  $J_s$  などが  $\psi$  自身および  $A$  のみならず  $\psi$  のこう配に依存している. ゆえに波動関数の硬さが解に影響することがわかる. 式 (1.49), 式 (1.50) を G-L 方程式と呼ぶ.

輸送電流のない単連結一次元の場合,  $\psi$  を実数とするゲージを選び G-L 方程式は

$$\frac{d^2 A}{dx^2} = \frac{e^{*2}}{m^*} \mu_0 \psi^2 A \quad (1.53)$$

および

$$\left( \frac{\hbar^2 \psi_0^2}{2m^* \mu_0 H_c^2} \right) \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\psi}{\psi_0} \right) = \left( \frac{e^{*2} \psi_0^2 A^2}{2m^* \mu_0 H_c^2} - 1 \right) \left( \frac{\psi}{\psi_0} \right) + \left( \frac{\psi}{\psi_0} \right)^3 \quad (1.54)$$

となる. G-L 方程式の第1式 (1.49) は  $\psi$  のこう配が0のとき, ロンドンの第二方程式 (1.28) に帰着する. ゆえに実効電子対密度を  $(n_s^*)_{\text{eff}} = |\psi|^2$  で定義すると

$$\lambda^2(T) = m^*/e^{*2} \mu_0 (n_s^*)_{\text{eff}} \quad (1.55)$$

である.

[3] G-L 理論の幾つかの結論

(1) 超常界面の秩序パラメータ:  $x \geq 0$  が超電導体である半無限の場合を考え, 磁界が  $H_c(T)$  より十分小さければ式 (1.53) を解くのに  $\psi = \psi_0$  を仮定して第一近似を求める. これを式 (1.54) に代入し, 周囲が絶縁物のときの境界条件  $d\psi/dx = 0$  から

$$\frac{\psi(x, H)}{\psi_0} = 1 - \frac{\kappa}{2\sqrt{2}(2-\kappa^2)} \left( \frac{H}{H_c(T)} \right)^2 \times \left[ \exp\left( \frac{-\sqrt{2}x}{\xi_{GL}} \right) - \frac{\kappa}{\sqrt{2}} \exp\left( \frac{-2x}{\lambda(T)} \right) \right] \quad (1.56)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_{GL}(T) &= \frac{\hbar |\psi_0(T)|}{(2m^* \mu_0)^{1/2} H_c(T)} \\ \kappa &= \frac{\sqrt{2} \mu_0 e \lambda^2(T) H_c(T)}{\hbar} = \frac{\lambda(T)}{\xi_{GL}(T)} \end{aligned} \right\} \quad (1.57)$$

$\xi_{GL}$  を G-L コヒーレンス長さ,  $\kappa$  を G-L パラメータと呼ぶ.  $\psi_0$  は無摂動時の値である. 試料内の磁束密度は

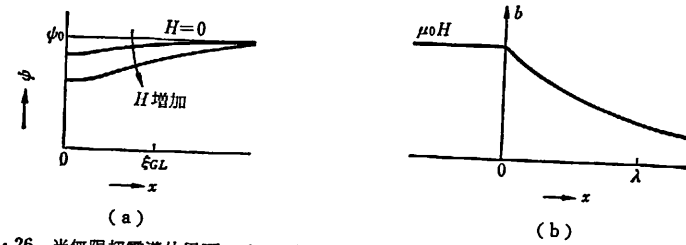


図 1.26 半無限超電導体界面の (a) 秩序パラメータ  $\psi$  と (b) 局所磁束密度  $b$  の変化の様子

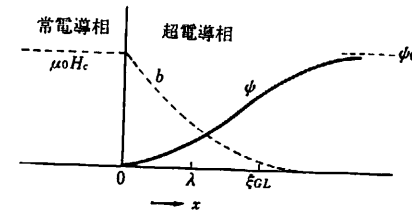


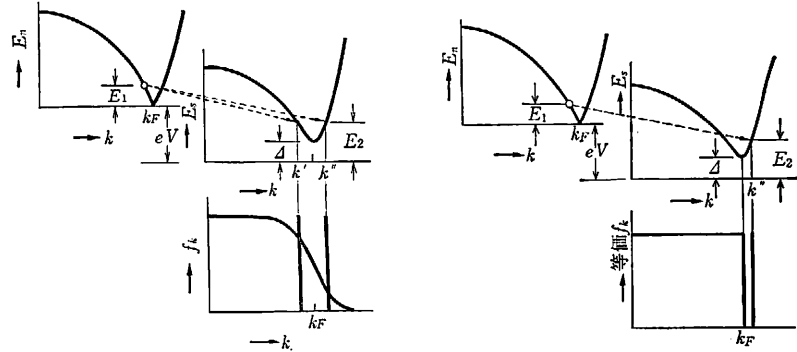
図 1.27 超常両相界面の  $b$  および  $\psi$  の空間変化 (外部磁界が  $H_c$  のとき)

$$b(x) = \mu_0 H \exp[-x/\lambda(T)] \quad (1.58)$$

式 (1.56) と式 (1.58) の関係は図 1.26 に示される.  $H$  の増大につれて境界附近の  $\psi$  が低下し, その領域の目安が  $\xi_{GL}$  である. G-L 理論は自由エネルギーを  $\psi$  の級数展開で近似しているから  $|\psi|$  の小さい  $T_c$  附近が成立範囲である.

(2) 界面エネルギー: 前項のように  $\psi$  と  $b$  は超常界面でその内部に向かいそれぞれ  $\xi_{GL}$  および  $\lambda$  を目安として内部に向かって変化する (図 1.27). 界面で  $\lambda$  程度磁束の侵入が起きると自由エネルギーは  $\mu_0 H_c^2 \lambda / 2$  程度低下する. 他方  $\xi_{GL}$  程度  $\psi$  が低下すると  $(\nabla|\psi|)^2$  の項を通じ運動エネルギーに従って自由エネルギーが  $\mu_0 H_c^2 \xi_{GL} / 2$  程度増加する. 合計して界面の自由エネルギー増加は  $\mu_0 H_c^2 (\xi_{GL} - \lambda) / 2$  程度である. この界面エネルギーが正なら界面形成に不利であり, 負ならば逆である. 界面エネルギーを G-L 理論で計算すると G-L パラメータ  $\kappa$  が  $1/\sqrt{2}$  より小なら正であり, 反磁界係数が0の場合  $H_c$  まで界面の形成に従って磁束の侵入は起きない. この種の材料を第一種,  $\kappa > 1/\sqrt{2}$  の材料を第二種の超電導材料と呼ぶ.  $\kappa > 1/\sqrt{2}$  の場合, 外部磁界がある程度 ( $< H_c$ ) 大きくなると界面エネルギーが負となり, 磁束の侵入が始まる. この磁界を下部臨界磁界  $H_{c1}$  という. 磁束の侵入が始まると試料の自由エネルギーが低下し,  $H_c$  を超える外部磁界でも試料内部に超電導領域が残存し, それが完全に消滅する外部





(a) 実際のトンネル図 エネルギー保存関係にある  $k'$  と  $k''$  のいずれかに空席率  $(1-f_k)$  に比例した確率でトンネルする ( $T=0(K)$ ).  
 (b) トンネル電子数を数える等価トンネル図

図 1.31 超・常電導体間で S 側を電圧  $V$  にバイアスしたときのトンネル図

席率が 0,  $k''$  の空席率が 1 であるとした等価トンネル図である図 1.31 (b) を用いても正しい。また、S 側の状態密度には式 (1.13) が用いられる。

〔2〕 トンネル特性

温度  $T [K]$  の場合、フェルミ分布関数  $f(E) = [1 + \exp(E - \mu)/k_B T]^{-1}$  を用いて、電圧  $V$  でバイアスされた SIN

トンネル接合のトンネル電流は

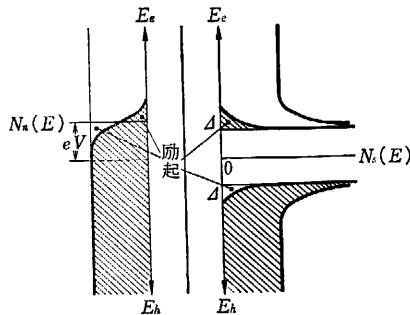
$$I_{sn} = \frac{G_n}{e} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E'}{(E'^2 - \Delta^2)^{1/2}} \times [f(E' - eV) - f(E')] dE' \quad (1.60 a)$$

ただし

$$G_n = (2\pi e^2 A / \hbar) |T_{sn}|^2 N_n(0) N(0) \quad (1.60 b)$$

ここで  $A$  は接合面積である。積分から  $|E'| < \Delta$  の範囲は除く。上式は S → N の電流と N → S の電流の差を取っていることに注意されたい。式 (1.60 a) の積分は図 1.32 のトンネル図で考えると理解しやすい。斜線部がフェルミ分布を考慮した励起の程度を表現している。  $T=0 [K]$  の場合、式 (1.60 a) は

$$I_{sn}(T=0 [K]) = \begin{cases} (G_n/e)[(eV)^2 - \Delta^2]^{1/2} & (eV > \Delta) \\ 0 & (eV < \Delta) \end{cases} \quad (1.61)$$



陰のない部分は電子の空席、陰の部分はホールの空席

図 1.32  $T \neq 0$  の超常トンネル電流を決定する図式

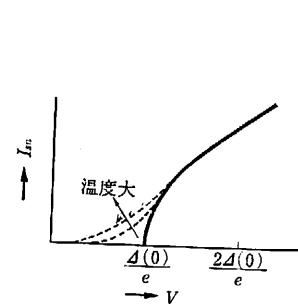
を与える。図 1.33 は SIN 接合の電流-電圧特性である<sup>13)</sup>。同様に SIS 接合は

$$I_{ss} = \frac{G_n}{e} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(E' - eV)}{[(eV - E')^2 - \Delta_1^2]^{1/2}} \cdot \frac{E'}{[E'^2 - \Delta_2^2]^{1/2}} \times [f(E' - eV) - f(E')] dE' \quad (1.62)$$

で、対応するトンネル図は図 1.34,  $I-V$  特性が図 1.35 である。  $\Delta_1, \Delta_2$  はそれぞれの超電導体のギャップパラメータであるが、  $\Delta_1 \neq \Delta_2$  の場合  $|\Delta_1 - \Delta_2|/e$  の電圧で  $I-V$  特性上構造があり、その少し上で負抵抗を示す。また、式 (1.61) から

$$\left(\frac{dI_{sn}}{dV}\right)_{T=0} = \begin{cases} G_n |V| / [V^2 - (\Delta/e)^2] & |eV| > \Delta \\ 0 & |eV| < \Delta \end{cases} \quad (1.63)$$

であり、  $I-V$  特性の導関数は状態密度の知識を与える。このような方法で材料の



温度上昇に伴いギャップパラメータも励起も変化する。

図 1.33 超常トンネルの  $I-V$  曲線とその温度変化

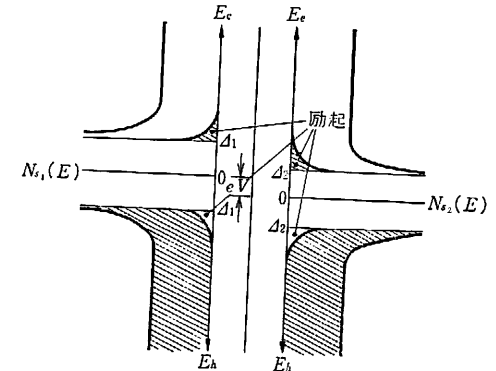
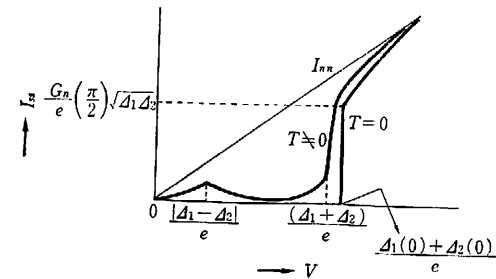


図 1.34 2 超電導体間のトンネル電流を決定する図式 ( $T \neq 0$ )



$I_{ss}$  は両電極が常電導のときのトンネル電流である。

図 1.35 2 超電導体間のトンネル電流 ( $T=0$  および  $T \neq 0$ )

状態密度を知る方法をトンネル分光と呼ぶ。

### 1.5 ジョゼフソン効果<sup>2)</sup>

#### (1) ジョゼフソン効果

1.4節では励起粒子，すなわち準粒子のトンネル現象を扱った。これに対しクーパー対のトンネル現象を扱うのがジョゼフソン効果である<sup>14)</sup>。ジョゼフソン効果の導出には理論上の準備が必要であるから，以下には定性的な記述を示す。

二つの超電導体  $S_1$  と  $S_2$  が接近している場合を考える。それぞれの波動関数  $\psi_1$  と  $\psi_2$  は式 (1.3) の形に書く。  $\psi_1$  および  $\psi_2$  は波動関数の特性として  $S_1$  および  $S_2$  の表面からわずかに染み出している。この染み出しが重なり合う程度まで  $S_1$  と  $S_2$  を接近させると相互作用を生じ，  $\psi_1$  と  $\psi_2$  は次の方程式の組を満足すると仮定する<sup>15)</sup>。

$$i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = -\frac{e^*V}{2} \psi_1 + K \psi_2 \quad (1.64a)$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = \frac{e^*V}{2} \psi_2 + K \psi_1 \quad (1.64b)$$

ここで  $K$  は相互作用を示す係数である。また，  $S_1$  と  $S_2$  には電圧  $V$  が加えられ，エネルギー原点は  $S_1$  と  $S_2$  の中央にとった。電子対密度  $n_{S_i}^*$  を  $n_{S_i}^* = |\phi|^2$  とし，  $\phi = \theta_2 - \theta_1$  なる  $\psi_1$  と  $\psi_2$  の位相差を用い，式 (1.64) を実部と虚部に分離すると

$$\frac{\partial n_{S_1}^*}{\partial t} = -\frac{2}{\hbar} K (n_{S_1}^* n_{S_2}^*)^{1/2} \sin \phi \quad (1.65a)$$

$$\frac{\partial n_{S_2}^*}{\partial t} = -\frac{2}{\hbar} K (n_{S_1}^* n_{S_2}^*)^{1/2} \sin \phi \quad (1.65b)$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = -\frac{K}{\hbar} \left( \frac{n_{S_2}^*}{n_{S_1}^*} \right)^{1/2} \cos \phi + \frac{e^*V}{2\hbar} \quad (1.65c)$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial t} = -\frac{K}{\hbar} \left( \frac{n_{S_1}^*}{n_{S_2}^*} \right)^{1/2} \cos \phi - \frac{e^*V}{2\hbar} \quad (1.65d)$$

を得る。  $\partial n_{S_i}^*/\partial t$  等が  $S_1$ ，  $S_2$  間の電流  $J$  に比例し，  $n_{S_1}^* = n_{S_2}^*$  と仮定すると

$$J = J_c \sin \phi \quad (1.66)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{2e}{\hbar} V \quad (1.67)$$

を得る。  $J_c$  をジョゼフソン接合の臨界電流と呼ぶ。この導出法は不完全である。例えば，このままでは一方の対電子数が減少し，他方のそれが増加する。実際には電源を介した閉ループを通じてそれらは定常に保たなければならない。また，  $J_c$  の値も  $S_1$  と  $S_2$  の間隔や，用いる材料とその寸法から決定できない。しかし，別のより正しい理論と多くの実験により，式 (1.66) と式 (1.67) の組は位相差  $\phi$  を用いてクーパー対トンネルの  $I$ - $V$  特性を表示する正しい式であることが保証されている。特に式 (1.67) の関係は現在の実験精度の及ぶ限り正確である。

式 (1.66) および式 (1.67) の特徴を述べよう。第一に接合の位相差  $\phi(t)$  を知れば接合の電圧と電流を知ることができる。このように位相差  $\phi$  は接合の状態を示す基本的なパラメータである。第二に  $\phi(t)$  が時間的に一定であると接合両端に電圧が発生しないが電流は流れる。流れうる電流の上限は  $J_c$  である。このように電流を流しても電圧が発生しない現象を直流ジョゼフソン効果と呼ぶことがある。第三に接合に一定直流電圧  $V$  を印加すると接合電流は  $J = J_c \sin(\omega_J t + \phi_0)$  と交流電流が流れる ( $\phi_0$  は積分定数)。ただし，  $\omega_J = (2e/\hbar)V$  であり，印加した電圧に比例し，比例係数は基礎物理定数である。この現象を交流ジョゼフソン効果と呼ぶことがある。そして  $f_J = (2e/h)V$  の電圧と周波数の比例関係をジョゼフソンの電圧-周波数関係と呼ぶ。

位相差が0の状態から接合に電流を流して  $\phi$  の状態まで増加させたとき接合に注入されるエネルギー  $\int V J dt$  を式 (1.66)，式 (1.67) を用いて求めると，接合のエネルギーは

$$E_c = (\hbar J_c / 2e) \cos \phi \quad (1.68)$$

であることが判明する。ただし，エネルギー原点は  $\phi = \pi/2$ ，すなわち電流を  $J_c$  だけ流したところにとっている。つまり電流を流さないときはそれより  $(\hbar J_c / 2e)$  だけ低い。  $E_c$  を接合の結合エネルギーという。

接合面積を  $A$  としたときの臨界電流密度  $j_c = J_c / A$  は理論的に<sup>16)</sup>

$$j_c = \frac{G_n}{A} \left( \frac{\pi \Delta(\tau)}{2e} \right) \tanh \frac{\Delta(\tau)}{2k_B T} \quad (1.69)$$

であり，これをアンベガオカー・パラトフの式と呼ぶ。  $G_n$  は式 (1.60b) である。実験的には  $G_n$  は  $V \gg 2\Delta/e$  の電圧における準粒子トンネルコンダクタンスである。

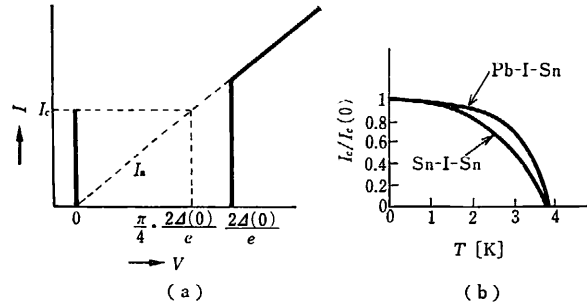


図 1.36  $T=0$  のジョセフソン接合の  $I-V$  特性 (a) および最大 0 電圧電流の温度依存性 (b)

$T=0$  [K] のトンネル接合の  $I-V$  特性を図 1.36 (a) に、 $j_c$  の温度依存性を同図 (b) に示す。  $I-V$  特性はジョセフソン電流と準粒子電流の重畳と理解される。

〔2〕 磁界の 効果

接合面が広いと接合面と平行に磁束が通り、位相差  $\phi$  は面内位置に依存する。本項ではこの磁界による  $\phi$  の変調を考察する。

スカラーポテンシャル  $\phi$  およびベクトルポテンシャル  $A$  はゲージ変換、すなわち一価のスカラー関数  $\chi$  を用いた  $A' = A + \nabla\chi$ ,  $\phi' = \phi - \partial\chi/\partial t$  と変換されても電磁気学的には等価である。すなわち、電磁気学に関連する量はゲージ変換に対して不変でなければならない。波動関数の位相  $\theta$  は  $\theta' = \theta - (2e/\hbar)\chi$  と変換されることが示される。

接合面の両側に相対する点 1 と 2 を図 1.37 のように選ぶとゲージ不変な位相差は

$$\phi = \theta_2 - \theta_1 + \frac{2e}{\hbar} \int_1^2 A(x, t) \cdot dl \quad (1.70)$$

で定義される。  $\theta$  および  $A$  に上記の変換を式 (1.70) に代入すれば  $\phi$  がゲージ不変であることは判明する。磁束が位相差を変調する様子は式 (1.70) から求められる。図 1.38 でバリアに沿って P, Q 2 点を考える。  $P_1, P_2$  などは P の電極 1 側および 2 側の点である。ロンドンゲージを用いると超電導体内で  $\nabla\theta = 0$ , すなわち  $\theta_1(P_1) = \theta_1(Q_1)$ ,  $\theta_2(P_2) = \theta_2(Q_2)$  であるから式 (1.70) を用いて

$$\phi(P) - \phi(Q) = \frac{2e}{\hbar} \left[ \int_{P_1}^{P_2} A'(P, t) \cdot dl - \int_{Q_1}^{Q_2} A'(Q, t) \cdot dl \right] \quad (1.71)$$

一方、図の破線内を外向きに通る磁束は

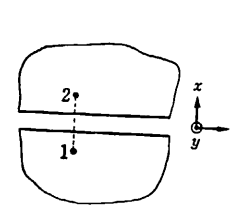


図 1.37 ゲージ不変の位相差を考えるため、トンネル接合の両側にとった 2 点

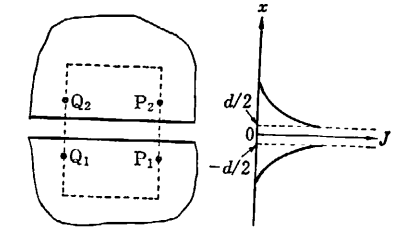


図 1.38 接合中の磁束による位相差の変調を求めるための積分路と両電極中の電流密度

$$\begin{aligned} \phi_y = \int_S B \cdot dS &= \oint A' \cdot dl = \int_{Q_2}^{Q_1} A' \cdot dl + \int_{Q_1}^{P_1} A' \cdot dl \\ &+ \int_{P_1}^{P_2} A' \cdot dl + \int_{P_2}^{Q_2} A' \cdot dl \end{aligned} \quad (1.72)$$

この式の右辺第 2 項および第 4 項は接合面に平行な積分で、積分路を侵入深さに比べ十分深くとれば  $J_s = 0$ , つまり  $A' = 0$  である。ゆえに式 (1.71) と式 (1.72) から

$$\phi(P) - \phi(Q) = (2e/\hbar)\phi_y \quad (1.73)$$

を得る。ゆえに接合面に沿う 2 点の位相差の差は 2 点間のバリアを通る磁束量に比例する。2 点間の距離を  $dz$  とし上下電極の侵入深さをそれぞれ  $\lambda_1, \lambda_2$  とすると、この磁束量は  $dz(d + \lambda_1 + \lambda_2)B_y$  であり、  $\partial\phi/\partial z = (2e/\hbar)(d + \lambda_1 + \lambda_2)B_y$  となる。  $B_z$  に関しては  $\partial\phi/\partial y = -(2e/\hbar)(d + \lambda_1 + \lambda_2)B_z$  であるから、1→2 の単位ベクトルを  $n$  とすれば

$$\nabla\phi = (2e/\hbar)(d + \lambda_1 + \lambda_2)[n \times B] \quad (1.74)$$

式 (1.74) を式 (1.66) および式 (1.67) と併せるとジョセフソン接合の電磁気学的応答を記述する基礎方程式となる。ただし、  $J_c$  は臨界電流密度と理解すべきである。接合のトンネル電流を記述する位相差  $\phi$  が、電界、磁界で時間的および場所的に変調される以上の現象をジョセフソン効果と呼ぶ。

電流対位相差の関係 ( $J-\phi$  関係と呼ぶ) が非線形であるから一般に解を求めるのは困難で、通常場所依存性が無視できる小面積接合と電圧が零で場所依存性だけを論ずるといった典型的なアプローチをとる。

〔3〕 ジョセフソン接合の波動方程式

図 1.39 に示すジョセフソン二次元伝送線では、電界はバリア  $d$  の領域に、磁界は  $d + 2\lambda$  の領域に存在する (上下両電極材料は等しいとする)。まず、  $\nabla \times E$

$= -\partial B/\partial t$  の式の両辺をそれぞれ図の破線領域に面積分した後  $\partial/\partial z$  を1回演算すると

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -\left(\frac{d+2\lambda}{d}\right) \frac{\partial^2 B_y}{\partial t \partial z} \quad (1.75)$$

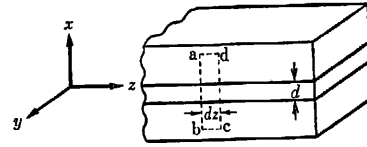


図 1.39 ジョセフソン伝送線の解析用モデル

同様に z 軸に垂直な面について

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = \left(\frac{d+2\lambda}{d}\right) \frac{\partial^2 B_y}{\partial t \partial y} \quad (1.76)$$

次に  $\nabla \times H = J + \epsilon \partial E/\partial t$  の x 成分に  $\partial/\partial t$  を演算すると

$$\frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial^2 B_z}{\partial y \partial t} - \frac{\partial^2 B_y}{\partial z \partial t} \right) = \frac{\partial J_x}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad (1.77)$$

式 (1.75), 式 (1.76) を式 (1.77) に代入して

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E_x = \frac{1}{\epsilon v^2} \cdot \frac{\partial J_x}{\partial t} \quad (1.78)$$

ただし

$$v^2 = (\mu \epsilon)^{-1} [d/(d+2\lambda)] \quad (1.79)$$

$J_x = -J_c \sin \phi$  を代入し, かつ  $\partial \phi/\partial t = (2e/\hbar) V = (-)(2eE_x d)/\hbar$  を用いて式 (1.78) を変形し, 時刻原点を  $\phi=0$  にとって積分すると

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = \frac{\sin \phi}{\lambda_J^2} \quad (1.80)$$

ただし

$$\lambda_J^2 = \hbar/2eJ_c \mu (d+2\lambda) \quad (1.81)$$

以上について特徴的なことは, ジョセフソン電流を除外すると超電導伝送線の式であり, その位相速度は自由空間に比べて  $[d/(d+2\lambda)]^{1/2}$  だけ遅い.  $d \sim 2.5 \text{ nm}$ ,  $\lambda \sim 50 \text{ nm}$  とするとこの比は 1:6 程度である. また,  $\lambda_J$  はジョセフソンの侵入深さと呼ばれ, 式の形から判明するように  $\phi$  が空間的に変化するときの特徴距離である. 前項で小面積の接合といったのは,  $\lambda_J$  に比べて小さい接合を意味する.  $(d+2\lambda) \sim 2\lambda \sim 90 \text{ nm}$ ,  $J_c \sim 10^4 \text{ A/cm}^2$  のとき  $\lambda_J \sim 5 \mu\text{m}$  程度である.

位相差の微小振動を考えるために  $\phi(y, z, t) = \phi_0(y, z) + \phi_1(y, z, t)$  のように時間平均  $\phi_0(y, z)$  を中心とした微小変化を仮定し,  $\cos \phi_1 \approx 1$  と線形化すると式 (1.80) は

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi_1 = \left( \frac{\cos \phi_0}{\lambda_J^2} \right) \phi_1 \quad (1.82)$$

となり,  $\phi_0$  が定数のとき  $\phi_1 = \exp[-i(\omega t - \beta r)]$  を得る. これを式 (1.82) に代入して

$$\omega^2 = \beta^2 v^2 + \omega_p^2, \quad \omega_p^2 = \left( \frac{v}{\lambda_J} \right)^2 \cos \phi_0 \quad (1.83)$$

なる分散関係を得る.  $\omega_p$  以下の周波数では波は伝播しない.  $\beta=0$  のとき, すなわち  $\omega = \omega_p$  では変動磁界が存在せず, 振動は電界のエネルギーと接合の結合エネルギーの周期的交代である.  $\omega_p$  をプラズマ角周波数と呼ぶ.

〔4〕 磁界による回折

臨界電流密度が一樣な図 1.40 のトンネル接合に磁束密度 B の磁界を y 方向に加える. 式 (1.74) に従って面内の位相差分布を生ずるであろうが, それによってトンネル電流, 従って電極内電流分布が決まり, それがまた磁界を作る. これを自己磁界と呼ぶ. 結局, 外部磁界と自己磁界の和である全磁界が位相差分布を決定するから, 自己磁界が無視できない場合の解析は一般に容易ではない. そこでまず自己磁界が無視できるとして論ずる. この場合は  $\phi(z) = (2ed'/\hbar) B_z + \phi(0)$  ( $\phi(0)$  は積分定数:  $d' = d+2\lambda$ ) が解であり, これによる電流を接合全面に積分すれば次式を得る.

$$\begin{aligned} I(B) &= WJ_c \int_{-L/2}^{L/2} \sin \left[ \frac{2ed'B}{\hbar} z + \phi(0) \right] dz \\ &= \left( \frac{\hbar WJ_c}{ed'B} \right) \sin \phi(0) \sin \left( \frac{ed'BL}{\hbar} \right) \end{aligned} \quad (1.84)$$

$\phi(0) = \pi/2$  のとき接合に流し得る (電圧を発生せず) 電流は最大となる.

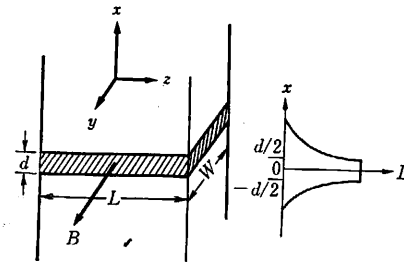


図 1.40 回折を解析するためのパリヤ中および両電極中の磁束分布

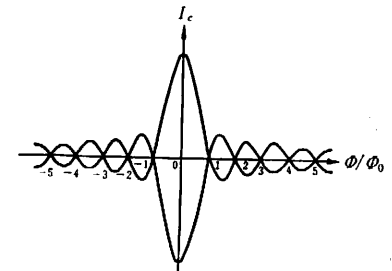


図 1.41 磁束による最大零電流電圧の変調 (フラウンホーファー回折パターン)

$I_c(0) = WLJ_c$ ,  $e/\hbar = \pi/\Phi_0$  ( $\Phi_0$  は磁束量子),  $\Phi = d'LB$  は全磁束であるから

$$I_c(\Phi) = I_c(0) \left| \frac{\sin(\pi\Phi/\Phi_0)}{\pi\Phi/\Phi_0} \right| \quad (1.85)$$

が全磁束  $\Phi$  に対して接合に流し得る零電圧最大電流である。上式の  $I_c(\Phi)$  以上の電流を流すと対電子トンネル電流以外, すなわち準粒子トンネル電流が流れざるを得ず電圧が発生する。図 1.41 は式 (1.85) を示したもので, 光学と同じくフラウンホーファー回折と呼ばれる。これは零電圧領域と電圧領域との境界を示すものであり, しきい値曲線とも呼ばれる。

例えば,  $I_c(\Phi_0) = 0$  で外部電流は全く流せないが, 接合面内では外部磁界に誘起された電流が両端部と中心で 0, その中央で最大となる分布で流れ, 左右両半で電流の極性は反対である。

〔5〕 自己磁界の影響

自己磁界は電極を流れる電流が作るから電流の分布, 従って電極形状, 電流の導入位置, グランドプレーンの有無などで自己磁界が変わる<sup>17)</sup>。

図 1.42 はグランドプレーン  $G$  を持った直線状トンネル接合を示した。  $G$  の鏡像電流は下部電極中の電流がバリア内に作る磁界を打ち消し, また  $y$  方向の電流分布を一様化する。幅  $W$  が  $\lambda_J$  以下なら問題は  $z$  方向の一次元として扱える。基礎方程式および境界条件は

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{\sin \phi}{\lambda_J^2} \quad (1.86)$$

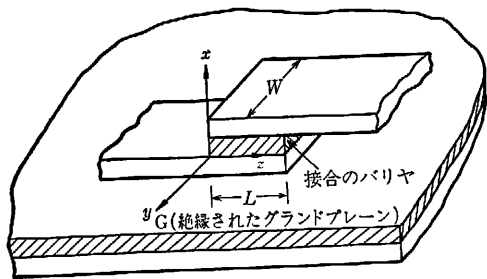


図 1.42 グランドプレーンのある直線状ジョゼフソントンネル接合

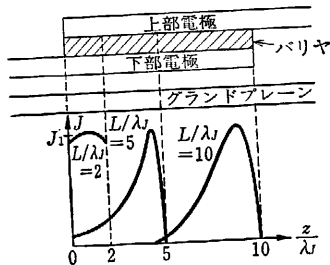


図 1.43 グランドプレーンのある直線状トンネル接合の自己磁束による (外部磁束 0) トンネル電流密度 ( $L/\lambda_J = 2, 5$  および 10 の三者についての計算値)

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0, L} = \left( \frac{2ed'}{\hbar} B_y \right)_{z=0, L} \quad (1.87)$$

$B_y$  の値は, 外部磁界を  $B_{ex}$ , 全電流を  $I$  とすると,  $G$  がある場合

$$W[B_y(0) - B_y(L)] = \mu_0 I, \quad B_y'(0) = B_{ex} \quad (1.88)$$

から求められる。以上から  $\phi(z)$  を数値的に求め, それから接合面内電流分布を  $B_{ex} = 0$  の場合について求めたのが図 1.43 である。図 1.44 は, 同じく  $B_{ex} = 0$  で接合長  $L$  を長くしても流し得る零電圧最大電流は一定値に飽和することを示した。参考にグランドプレーンがない場合も併記した。零電圧最大電流の  $B_{ex}$  依存性, すなわち  $I_c(B_{ex})$  を例示したのが図 1.45 である。ただし, 以上で  $J_1$  は  $z$  方向単位長の電流密度である。

以上の例から自己磁界の影響をまとめる。

- (1)  $L/\lambda_J$  が大きいと, 端部  $2\lambda_J$  の部分だけしか ( $G$  があれば一端,  $G$  がなければ両端) 電流が流れないように見える (図 1.44)。
- (2)  $L/\lambda_J \ll 1$  の場合と異なり, 零電圧最大電流が 0 となる  $B_{ex}$  の値がない。
- (3) しきい値曲線は  $L/\lambda_J$  が大きいほど角ばってくる。

などである。  $L/\lambda_J \ll 1$  の場合と同様, 内部に  $\Phi_0$  の整数倍の磁束を含む附近をピークとしたローブの合成がしきい値曲線となるのであるが, 外部変数である (すなわち実験的に直接調節できる)  $I$  と  $B_{ex}$  を指定しても, 接合面内の電流分布や磁束分布が一とおりでなく, 隣り同士のローブが重なり合っている。また, 接合面内では磁束量子がトンネル電流のうずで囲まれ, その分布パターンは各ローブごとに異なる。同一ローブ内で  $I$  や  $B_{ex}$  を変化させるとこのうずの配置は連続的に変化するが, 隣接するローブの配置へはジャンプして遷移する。ローブの中心附近でのうずの個数でそのローブを指定し,  $n$  ボルテックスモードとか  $n$

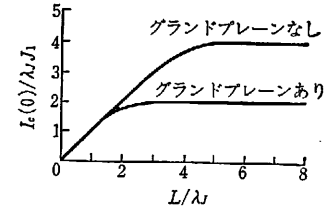


図 1.44 直線状接合の零電圧最大電流の接合長に対する依存性

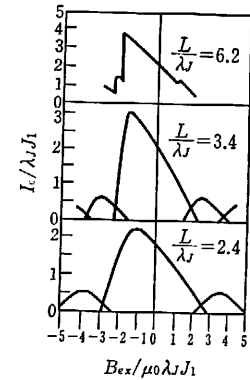


図 1.45 グランドプレーン付直線状接合の零電圧最大電流の外部磁束依存性

フラクソイドモードとか呼ばれる。このボルテックスは第二種超電導体のボルテックスとは異なり、磁束量子もそれを取り巻く電流のうずも  $d'$  程度の厚さのへん平なものでジョゼフソンボルテックスといわれる。 $n$  が大きいときは、接合の中心部は完全なボルテックスであり、従ってその部分は全電流に寄与しない。端部ではボルテックスは不完全で、その部分が全電流に寄与する。

1.6 ジョゼフソン接合を含む超電導回路

[1] ジョゼフソン接合の等価回路と一般の接合

微小面積のトンネル接合の特性は式 (1.66)、式 (1.67) で示される。しかし、 $J_c$  以上の電流を流すと電圧を発生して準粒子トンネル電流が流れ損失を伴う。もちろん構造上静電エネルギーも蓄積する。前者の効果を並列抵抗で、後者を並列容量で示したのが図 1.46 である。並列抵抗と臨界電流の間には式 (1.69) が成立するが、準粒子トンネル以外の原因 (例えばリーク) でも損失があり得るから、 $J_c R_n (R_n = 1/G_n)$  の積は一般に式 (1.69) よりも低い。従って、 $J_c R_n$  積の式 (1.69) からのずれはトンネル接合の不完全さの一つの評価となる。

ジョゼフソン効果はトンネル接合以外の構造でも実現する。図 1.47 (a) は二つの超電導電極が長さ  $L$ 、幅  $W$  の微小導体で連結された構造でマイクロブリッジ、単にブリッジまたはジョゼフソン弱結合と呼ばれる。電極部をバンク、連結部をリンクと呼ぶ。リンク部はバンクと同じ材料または別の常電導材料の場合もある。弱結合がジョゼフソン効果を示す理論はトンネル接合とは異なるが、基本的には両バンク部がリンク

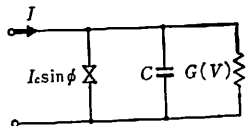
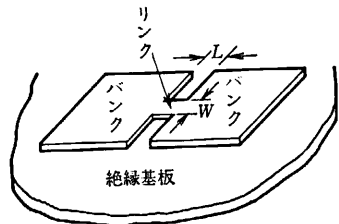
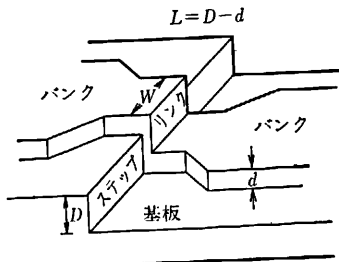


図 1.46 ジョゼフソン接合の等価回路



(a) 平面マイクロブリッジ



(b) 段差マイクロブリッジ

図 1.47 マイクロブリッジの2種

で弱く結合しているのが原因である。詳しい解析によれば、リンク長  $L$  は材料のコヒーレンス長さ  $\xi$  の 3.5 倍以下でなければならない。Nb など  $T_c$  も高く、機械的・化学的にも丈夫な高融点超電導材料では  $\xi$  は 10 nm のけたであるから、平面薄膜技術で図 1.47 の構造で製作するのは困難である。これを解決する方法の二つを紹介する。

第一は、 $\xi$  は温度の関数で  $\xi(T) \propto (1 - T/T_c)^{-1/2}$  の形であるから  $T_c$  付近で大きくなる。この方法では使用温度が限定されるので中間的な方法である。第一種超電導材料は  $\xi$  が大きい、寿命が短く実用的ではない。第二の例は、図 1.47 (b) に示す真空たい積膜の段差でリンク長を定義する方法である<sup>19)</sup>。この方法は、最近多く試みられ理論に近い特性も得られるようになった。

トンネル接合もバリアを絶縁膜で構成する場合 2 nm ~ 5 nm が要求され、必ずしも容易ではない。通常は下部電極膜をたい積後、その表面を酸化 (自然酸化、プラズマ酸化、陽極酸化など) して作ると、理論とほとんど一致する特性を得ることが可能である。バリアとして半導体 (例えば非晶質 Si) 膜を用いると、そのトンネルバリアが低いから 10 nm 程度の膜厚が許される。

トンネル型、弱結合型のいずれにせよ理論の要求に近い特性が得られつつあるが、その実用性は必ずしも十分ではなく、超電導エレクトロニクス実用の最大の基礎的課題の一つである。問題点は

- (1) 寿命が短いか、特性変化が無視できない。
- (2) 狙った特性からのずれが大きい。
- (3) 集積化した場合など特性のそろいが十分でない。

などであるが、これも徐々に解決されつつある。

接合の特性は幾つかのパラメータで議論される。その一つは前記の  $J_c R_n$  積である。図 1.48 は各種接合の  $J_c R_n$  積の温度依存性を示した理論の結果である<sup>19)</sup>。dirty および clean はいずれも弱結合の場合で、リンク部での電子の平均自由行程を  $l$  とすると、 $l < \xi$  が dirty、 $l > \xi$  が clean である。

点接触型 (point contact) と呼ばれる図 1.49

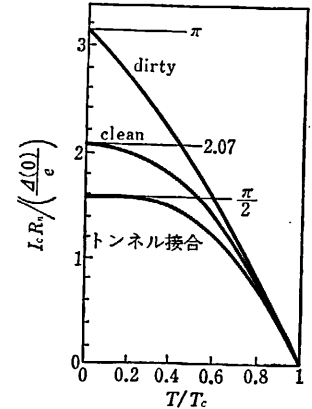


図 1.48 各種ジョゼフソン接合の  $J_c R_n$  積の温度依存性

の構造, すなわち超電導平面に先端の曲率半径が $\xi$ 程度の超電導針を圧着したものが主として電磁波検出などに用いられるが, 接触部に絶縁物が介在するか否かでトンネル型か弱結合型である。

ジョゼフソン接合の各種は回路的特性にもそれぞれの特徴がある。図1.46を参照してトンネル型は構造上  $C$  が大きい, 従って,  $CR$  時定数が高速応答の上限となる。弱結合型と点接触型はその点高速応答に適している。弱結合型は構造が二次元的, 点接触型は三次元的である。そのためリンク部で発生する熱のバンク部への放散は点接触型が圧倒的に良い<sup>20)</sup>。しかし, 点接触型は集積化には適さない。図1.47(b)の構造では, リンク部膜厚はバンク部よりはるかに薄いので熱放散が良い。このようにリンク部膜厚をバンク部より薄くした弱結合を VTB (Variable Thickness Bridge) と呼ぶが, 最近試みられる弱結合は VTB の特徴を備えている。

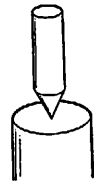


図1.49 点接触型ジョゼフソン接合

(2) 直流電源による  $I-V$  特性

図1.46の並列回路に直流電流  $I$  を供給した場合

$$\frac{\hbar I_c}{2e} \cdot \frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{\hbar G}{2e} \cdot \frac{d\phi}{dt} + I_c \sin\phi = I \quad (1.89)$$

が  $\phi$  を決定する基礎方程式である。これを以下のように無次元化する。

$$\beta_c \frac{d^2\phi}{d\theta^2} + \frac{d\phi}{d\theta} + \sin\phi = \frac{I}{I_c} \quad (1.90)$$

ただし

$$\theta \equiv \omega_c t \equiv (2e/\hbar)(I_c/G)t \quad (1.91)$$

$$\beta_c \equiv \frac{\omega_c C}{G} = \left(\frac{2e}{\hbar}\right) \left(\frac{I_c}{G}\right) \frac{C}{G} \quad (1.92)$$

$\omega_c$  は  $I_c/G (=I_c R_n)$  をジョゼフソンの  $V-f$  関係で周波数換算したものである。 $\beta_c$  はマクカンパ係数と呼ばれ  $\omega_c$  と  $CR_n$  時定数の逆数の比である。 $CR_n$  が高速応答の上限を律するほど  $\beta_c$  は大きくなる。

$\beta_c=0$  のときは式(1.89)は積分できる。一般にジョゼフソン素子の  $I-V$  特性は  $I$  および  $V$  の時間平均で示す。なぜなら電圧が  $1\mu V$  の場合, 位相差  $\phi$  は約 480 MHz で変化するから, 実時間でその観測することはほとんどないからである。従って, 今の場合  $V = \langle (\hbar/2e)d\phi/dt \rangle$  であり, 通例  $V$  や  $I$  と書いた場合, 時間平均記号  $\langle \rangle$  を省略している場合が多い。解は

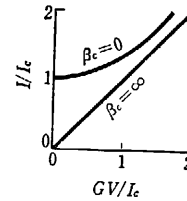


図1.50  $\beta_c=0$  および  $\beta_c=\infty$  の場合のジョゼフソン接合の  $I-V$  特性

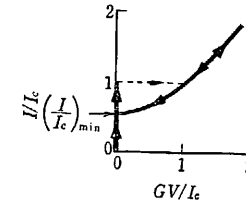


図1.51  $\beta_c=4.2$  の場合のジョゼフソン接合の  $I-V$  特性

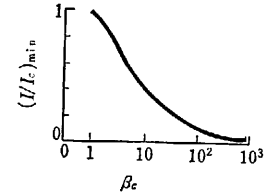


図1.52 ジョゼフソン接合の  $I-V$  特性のヒステリシス  $I_{c, min}$  の  $\beta_c$  依存性

$$\left. \begin{aligned} V=0 & \quad (I < I_c) \\ V=(I_c/G)[(I/I_c)^2 - 1]^{1/2} & \quad (I > I_c) \end{aligned} \right\} \quad (1.93)$$

これを示したのが図1.50である。

$\beta_c \approx 0$  の場合は数値解が利用される。その結果を図1.51に示す<sup>21)</sup>。動作の大勢は以下のように理解できる。 $I \gg I_c$  なら電流は大部分  $CR$  並列回路に流れる。そして  $(CR)^{-1}$  よりも交流周波数(平均電圧を周波数換算したもの)が高いと交流成分は大部分  $C$  に分流して  $I-V$  特性はオーミックに接近する。そして瞬時波形の交流分はほとんど正弦波である。

さて, 図1.51の特性は零電圧分枝と電圧分枝に分かれる。 $I_{min} < I < I_c$  の電流範囲では二価, すなわち両分枝のどちらかの電圧をとる。それ以外は一価である。原点から電流を増加すると  $I_c$  まで電圧は0で, それ以降矢印に沿ってスイッチし電圧分枝をたどる。そこから電流を下げると  $I_{min}$  までは電圧分枝をたどり,  $I_{min}$  に達すると零電圧分枝にスイッチする。 $I_c$  におけるスイッチは  $\beta_c > 1$  の場合に起きる。 $I_{min}$  の値は  $\beta_c$  に依存するが, その関係は図1.52に示される。図1.51の特性は常抵抗  $R_n$  を線形抵抗と仮定した場合であるが,  $R_n$  は実際には準粒子トンネル抵抗であり, 図1.35のような特性であるから, これを考慮すると図1.51および図1.52は多少変更されるが, 大勢は失われない。

(3) ジョゼフソン接合のシミュレータ

小面積の接合を考える。式(1.89)に相似な力学系としては回転振子の式

$$M \frac{d^2\phi}{dt^2} + D \frac{d\phi}{dt} + mgl \sin\phi = T \quad (1.94)$$

がある。 $\phi$  は回転角,  $T$  はトルクであり, その他は常識的な記号である。両式のパラメータの対応関係は明りょうであろう。従って, 回転振子の運動を調べれば

ジョゼフソン接合の  $I-V$  特性を知ることができる。これを振り子モデルと呼び、瞬時波形や過渡応答などのシミュレーションに製作応用される。また、製作しなくてもイメージが頭に浮かぶので、例えば図1.52のようなヒステリシス特性などが理解しやすい。

式(1.89)はポテンシャル  $U(\phi) = -(I_c \cos \phi + I\phi)$  の場で質量  $(\hbar I_c / 2e)$ 、減衰定数  $(\hbar G / 2e)$  の質点の一次元運動と等価である。これを図示したのが図1.53である。深さ  $I_c$  で変調された洗たく板に電流  $I$  に比例する傾斜をとった坂道を質点が転げ落ちるので洗たく板モデルと呼ばれる。  $I > I_c$  となると  $U(\phi)$  はどこでも負であるから質点は落下を続ける。これが電圧状態である。このモデルは雑音のあるとき  $I < I_c$  でも確率的に落下し電圧を発生する様子を理解するなどに便利であるが、定常な電圧状態のシミュレーションには長い板が必要であり実際には製作されない。

図1.54は電子回路によるシミュレータであり、全体として基準発振器  $\omega_0$  に電圧制御発振器 VCO の周波数を位相ロックするループを構成し、ループがロックしているときは  $I_i = V_i / R + C dV_i / dt + I_f$  であり、帰還電流は  $I_f = I_m \times \sin \{ \int k V_i dt \}$  ( $k$  は VCO の電圧周波数係数) であるから  $V_i = (1/k) d\phi / dt$  と置く

$$I_i = (C/k) \frac{d^2 \phi}{dt^2} + (kR)^{-1} \frac{d\phi}{dt} + I_m \sin \phi \quad (1.95)$$

となり、式(1.89)と等価である。この形は市販の位相ロック IC で簡単に実現でき、パラメータ変更も容易である<sup>22)</sup>。

分布型接合の場合、振り子をばね(インダクタンスに相当)で多数並列に並べ方法が用いられる<sup>23)</sup>。

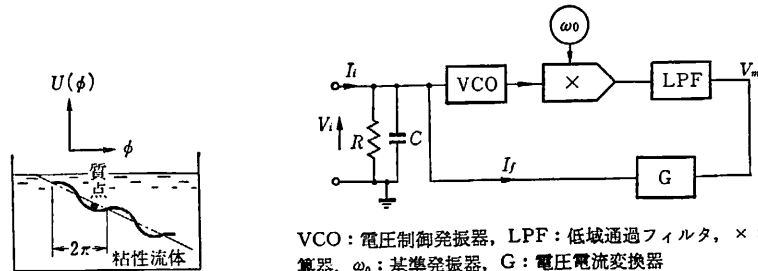


図 1.53 洗たく板モデル

図 1.54 ジョゼフソン接合の電子回路によるシミュレーション

〔4〕 交流ジョゼフソン効果

マイクロ波から遠赤外の電磁界中で  $I-V$  特性を測定すると特異な構造が出る。電磁界を電流源で記述するのが実際に即しているが、電圧源モデルのほうが解析が容易である。図1.55の直流電圧源および交流電圧源に対して接合電流は

$$i_j(t) = I_c \sin [(2eV/\hbar)t + (2eV_s/\hbar\omega_s) \sin \omega_s t + \phi_0] \\ = I_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n J_n \left( \frac{2eV_s}{\hbar\omega_s} \right) \sin [(\omega_J - n\omega_s)t + \phi_0] \quad (1.96)$$

となる。  $\omega_J = 2eV/\hbar$  はジョゼフソン周波数である。  $\omega_J = n\omega_s$  のとき、つまり

$$V = n \frac{\hbar\omega_s}{2e} \quad (1.97)$$

なら  $I-V$  特性に上式に相当する電圧位置に電流スパイクができる。全  $I-V$  特性はこれに常電流  $I_c = GV$  を加えたもので、図1.56のようなステップとなる。

図1.57の電流源モデル(容量は省略)の場合は数値計算が用いられる。  $\Omega = \omega_s/\omega_c$  ( $\omega_c$  は式(1.91)) = 0.16 の場合の例を図1.58に示す<sup>24)</sup>。換算周波数  $\Omega$  が

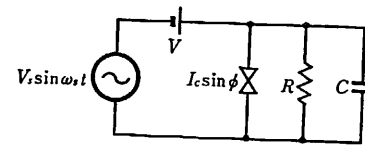


図 1.55 直流電圧源および交流電圧源でバイアスしたジョゼフソン接合

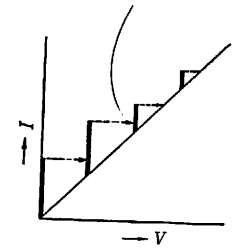


図 1.56 電圧源バイアスされたジョゼフソン接合のシャピロステップ

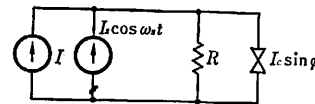
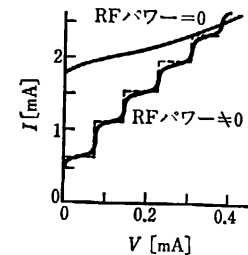


図 1.57 直流電流源および交流電流源でバイアスされたジョゼフソン接合



実験値は雑音(100 K 相当)のため丸みを帯びている。

図 1.58 電流源バイアスされたジョゼフソン接合のシャピロステップ(実線: 実験値, 破線: 計算値)

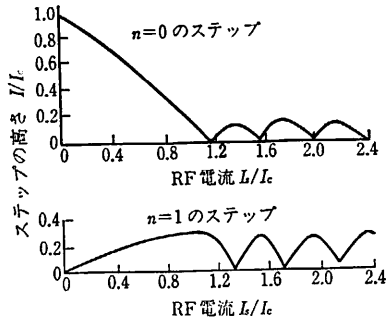


図 1.59  $\Omega=0.16$  のときの電流源モデルによる  $n=0$  および  $n=1$  のステップ高さの RF 電流依存性

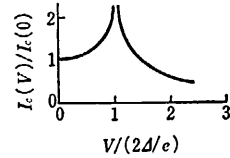


図 1.60 臨界電流の電圧依存性

大きいほどステップ高さは大きい。

ステップの発生はジョゼフソン発振が外部周波数に引き込まれる現象であって、電流源、電圧源いずれのモデルでも式 (1.97) の位置にステップができる。このステップをシャピロステップと呼ぶ<sup>25)</sup>。  $\Omega=0.16$  の電流源モデルで  $n=0$  および  $n=1$  のステップ高さの  $I_c$  依存性を図 1.59 に示す。マイクロブリッジなどの性能評価にはこの種の測定と計算の一致の程度が用いられる。

以上では  $I_c$  は定数としたが、 $I_c$  は温度依存性のほかに図 1.60 に示すような電圧依存性があり、 $2\Delta/e$  で理論上は発散し、それ以上では急に落ちる。従って、シャピロステップは  $2\Delta/e$  または  $I_c R_n$  積の数倍程度の電圧までしか観測できない。  $2\Delta/e$  における  $I_c$  のこの発散をリーデルピークと呼ぶ<sup>26)</sup>。実際には材料の不均質、異方性と多結晶のからみ合いなどでピークはぼかされるのが通常である。

ジョゼフソン接合は、シャピロステップの電磁波電力依存性(図 1.59)、 $G(V)$  の非線形性(図 1.39)その他の効果により、 $I-V$  特性が電磁波により敏感に影響を受けることを利用して電磁波検出に応用される。そこで微小信号インピーダンスを知りたいところである。零電圧状態では  $L_J = \hbar/2eI_c \cos \phi_0$  ( $\phi_0$  はバイアス電流で指定される)のインダクタンスである。電圧状態ではバイアス点、換算周波数  $\Omega$ 、信号振幅などに複雑に依存する。ある計算例では  $n=1$  のシャピロステップの開始前後のバイアス点ではそのインピーダンスの実部は負となる<sup>27)</sup>。

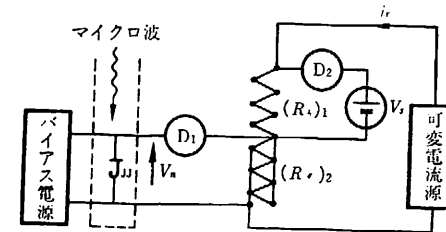
[5] ジョゼフソン電圧標準

式 (1.97) の関係をシャピロステップの実験で実現できるから、この観点からジョゼフソン接合は基礎定数 ( $2e/h$ ) を変換係数とした電圧周波数変換器として

利用できる。その際ステップ番号  $n$  は  $I-V$  特性上で数えてもよいが、電圧値を適当な精度で予備的に知れば確実に推定できる。我が国では 1977 年以降  $2e/h = 483.594000 \text{ THz/V}_{\text{BIe}}$  と国際的に約束された値を用いて電圧標準を周波数標準から誘導している。  $V_{\text{BIe}}$  とは、1969 年に規定した方式によって国際度量衡局 (BI) が実現する 1 ボルトの意である。このジョゼフソン電圧標準は、別な見方からいえば次のとおりである。  $n$  番目のシャピロステップにバイアスされた接合は電圧  $V_n = nhf/2e$  の理想的電圧源である。詳細な実験的検証の示す限り、シャピロステップは理想的に定電圧性であり、式 (1.97) の関係は使用する材料、接合のタイプ、製法、実験温度、電磁波の周波数など考え得る実験条件の変化には少なくとも  $10^{-9}$  程度までは無関係に成立する。

図 1.61 はジョゼフソン電圧  $V_n$  と標準電池電圧  $V_s$  を比較する概略図である<sup>28)</sup>。バイアス電流とマイクロ波電力の調節により所望の次数のステップ中央にバイアスする。  $R_1$  および  $R_2$  はそれぞれ  $N$  個の公称値の等しい抵抗を直列接続してあり、補助短絡具でそれを  $N$  個の並列接続に切り換える。直列の値を  $R_1$ 、並列の値を  $R_2$  と記号する。要素抵抗の公称値を  $R_0$  とし、各抵抗を  $R_i = R_0(1 + \delta_i)$  とすると、  $R_1/R_2 = N^2(1 + \Delta)$  としたとき  $\Delta$  は  $\delta^2$  のオーダーである。ゆえに  $|\delta_i| < 10^{-4}$  のとき、  $|\Delta| < 10^{-8}$  となり、  $N^2$  の抵抗比、従って分圧比を高精度で実現できる。  $i_s R_1 = V_s$  となるように  $i_s$  を調節し、平衡を零検出器  $D_2$  でモニターする。一方、このとき  $i_s R_2 = V_n = nhf/2e$  となるように、例えば  $f$  を調節して平衡を  $D_1$  で見る。結局、  $V_s = N^2 nhf/2e$  が、例えば  $10^{-8}$  の精度で実現できる。

雑音が関与するとシャピロステップは後述のように上下両端部が丸みを帯びてくるので、ステップ高さは  $100 \mu\text{A} \sim 200 \mu\text{A}$  程度が必要である。従って、接合の



( $R_1$ )<sub>1</sub> と ( $R_2$ )<sub>2</sub> は接続替えて上下交換して用いる。  
図 1.61 ジョゼフソン電圧  $V_n$  と標準電池電圧  $V_s$  の精密比較法の略図 (破線内は液体ヘリウム温度)

臨界電流も適当に大きく、ステップ次数はあまり大きくないほうがよい。通常1個の接合で5mV~10mV程度が実用的限界である。ゆえに $N^2$ を下げ感度および精度を向上するには、多数個の接合を直列接続し、個々にバイアス調節をする。20個の直列接続で100mVを実現した例もある<sup>29)</sup>。

接合の直列接続が外部電磁波に対して全部同期(引き込み)できれば1V程度のジョゼフソン電圧標準を実現できる<sup>30)</sup>。また、 $D_1$ に後述のSQUIDを用いれば感度向上が期待できる。今後はこれらの方向へと発展するであろう。

〔6〕 ジョゼフソン接合と雑音

ジョゼフソン接合が電圧状態にあるとき、その電流は揺らぐ。そのスペクトルに関してはトンネル接合に関する理論がある<sup>31)</sup>。应用上重要な $\omega \ll eV/\hbar$ , かつ $\omega \ll k_B T/\hbar$  ( $V$ は直流バイアス電圧,  $T$ は温度)の場合

$$\langle i^2(\omega) \rangle = \frac{e}{\pi} \left[ I_{qp}(V) \coth\left(\frac{eV}{2k_B T}\right) + 2I_p(V) \coth\left(\frac{eV}{k_B T}\right) \right] \quad (1.98)$$

となる。 $I_{qp}$ および $I_p$ は、それぞれ電流の準粒子(quasi-particle)成分および対電子(pair-particle)成分である。 $T=4.2$ [K]なら $V \sim 1$ mVで $\coth$ 項はほとんど1で、式(1.98)により雑音はほとんどショット雑音的である。

一方、電圧が十分低く $eV \ll k_B T$ なら式(1.98)は次式で近似され、ジョンソンの雑音的である。これらの式はトンネル接合以外にも概略の指針を与える。

$$\langle i^2(\omega) \rangle = \left(\frac{1}{2\pi}\right) \frac{4k_B T}{R_T}, \quad (R_T = V/(I_p + I_{qp})) \quad (1.99)$$

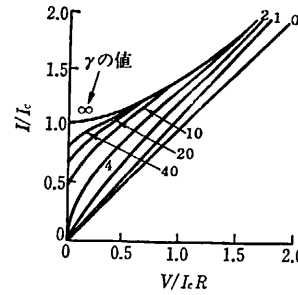
平均電圧 $V$ にバイアスされたジョゼフソン発振 $\omega_0 = 2eV/\hbar$ のスペクトルは

$$\langle i^2(\omega) \rangle = \frac{1}{2} I_c^2 \left\{ \frac{1}{2} \Delta\omega \left[ (\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{1}{2} \Delta\omega\right)^2 \right] \right\} \quad (1.100)$$

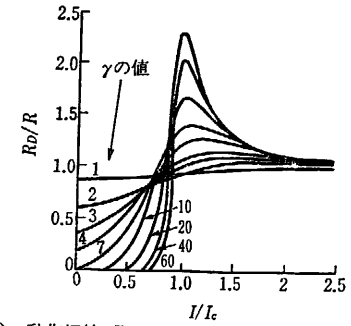
$$\Delta\omega = \left(\frac{2e}{\hbar}\right)^2 R_D^2 e \left[ I_{qp}(V) \coth\left(\frac{eV}{2k_B T}\right) + 2I_p(V) \coth\left(\frac{eV}{k_B T}\right) \right] \quad (1.101)$$

である。 $R_D$ はバイアス点における $I-V$ 特性の微分抵抗 $dV/dI$ である。ただし、 $\Delta\omega \ll \omega_0$ を仮定した。

以上のようにジョゼフソン接合と雑音は密着しているから、図1.46を用いての $I-V$ 特性も雑音を考慮に入れ修正の要がある。 $eV \ll k_B T$ かつ $\beta_c$ (式(1.92)) $\ll 1$ の場合について以下の結果がある<sup>32)</sup>。図1.62(a)は雑音パラメータ $\gamma(= \hbar I_c / ek_B T)$ によって $I-V$ 特性が変化の様子、同図(b)は $R_D$ がバイアス電



(a)  $I-V$  特性の変化



(b) 動作抵抗  $R_D$  とバイアス電流の関係の変化

図1.62  $\beta_c = 0$  のジョゼフソン接合に雑音が及ぼす影響

流および $\gamma$ で変化する有様を示したものである。 $\gamma$ は接合の結合エネルギーと熱雑音エネルギーの比であるから、雑音が結合を乱す度合に応じジョゼフソン効果が薄らぎ、零電圧状態と電圧状態の境界が丸みを帯びてくる。

〔7〕 ジョゼフソン接合と並列アレイと干渉・回折

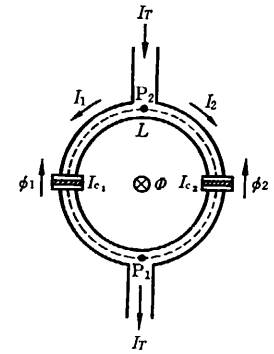
2個のジョゼフソン接合を超電導線で並列接続した図1.63の回路は、ループに加えた外部磁束 $\Phi_{ex}$ に依存して定まる $I_{Tc}$ までは電圧を発生しないで全電流 $I_T$ を流せる。ゆえに $I_{Tc}(\Phi_{ex})$ を知れば磁束検出に応用できる。

電気回路では

- (1) キルヒホッフの電流則(KCLと略)
- (2) キルヒホッフの電圧則(KVL)
- (3) 回路素子の特性

を知れば問題が解ける。ところで上記の回路は零電圧状態を論ずるのでKVLは使えない。また、素子特性には式(1.66)および式(1.67)を用いる。そこでKVLの代わりに以下の関係が必要となる。 $P_2$ 点から $P_1$ 点までの位相差は式(1.70)のゲージ不変の位相差を用いて

$$\theta(P_1) - \theta(P_2) = \phi_1 - \frac{2e}{\hbar} \int_{P_1(左)}^{P_2} A \cdot dl = \phi_2 - \frac{2e}{\hbar} \int_{P_1(右)}^{P_2} A \cdot dl \quad (1.102)$$



破線はベクトルポテンシャルの積分路である。

図1.63 DC SQUID (2接合並列アレイ)

これは  $P_2$  から  $P_1$  への位相差は、左右いずれの分枝を経由して求めても等しいことを示している。この関係を  $K\phi L$  と呼ぶことにする。さて、上式は

$$\phi_2 = \phi_1 + \frac{2e}{\hbar} \oint A \cdot dl = \phi_1 - (2\pi\Phi/\Phi_0) \quad (1.103)$$

と書ける。一周積分はループを反時計回りに回る。 $\Phi$  はループを貫く磁束、 $\Phi_0 = h/2e$  は磁束量子である。上式を用いて全電流は

$$I_T = I_{c1} \sin \phi_1 + I_{c2} \sin \left( \phi_1 - \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} \right) \quad (1.104)$$

となり、全電流はループ磁束  $\Phi$  に影響される。 $\Phi$  は外部磁束  $\Phi_{ex}$  とループ内を流れる循環電流  $I_{circ}$  の作る磁束  $\Phi_s (= LI_{circ}, L$  はループの自己インダクタンス) の和である。 $\Phi_s$  を自己磁束と呼ぶと、自己磁束が重要な場合は一般に解法が困難となる。まず、自己磁束が無視できる場合を論ずる。

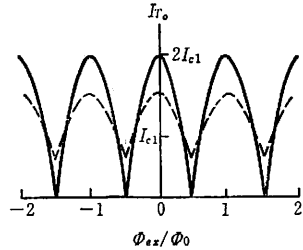
$\Phi_s$  が無視できれば  $\Phi = \Phi_{ex}$  は独立変数である。電流を流すと  $\phi_1$  が增大する。 $\phi_1$  による調節の限界が  $I_{Tc}$  を与える。式 (1.104) を  $\phi_1$  に関し極大化すると

$$I_{Tc}(\Phi_{ex}) = [(I_{c1} - I_{c2})^2 + 4I_{c1}I_{c2} \cos^2(\pi\Phi_{ex}/\Phi_0)]^{1/2} \quad (1.105)$$

を得る。図 1.64 にその関係を示すが、これは 2 光線の干渉と同じである。 $\Phi_{ex}$  が光路差、 $\Phi_0$  が波長にあたる。そこでこの並列アレイを DC 超電導量子干渉計 (DC Superconducting QUantum Interference Device: DC SQUID) と呼ぶ。

DC SQUID に  $I_{Tc}$  以上の電流を流すと電圧を発生するが、図 1.65 にその  $I-V$  特性 ( $I_{c1} = I_{c2}$  の場合) を示した。 $\Phi_{ex}$  の変化により  $\Phi_s$  を周期として特性が変化する。すべての変化は  $\Phi_{ex} = n\Phi_0$  と  $\Phi_{ex} = (n + 1/2)\Phi_0$  の特性の間になる。

図 1.41 の回折パターンと同様 DC SQUID にも光学用語が採用されている。



実線は対称 ( $I_{c1} = I_{c2}$ )、破線は非対称 ( $I_{c1} = 2I_{c2}$ ) の場合である。

図 1.64 自己磁束を無視した DC SQUID の外部磁束に対する全臨界電流の干渉特性

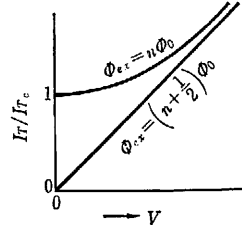


図 1.65 対称 DC SQUID で自己磁束が無視できる場合の電流-電圧特性が外部磁束で変調される様子

図 1.64 の  $\Phi_{ex}/\Phi_0 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  を中心とするローブは、ループ内にそれぞれ  $0, \pm 1, \pm 2, \dots$  の磁束量子を含む。正確に言えば式 (1.103) を変形して

$$\Phi + (\hbar/2e)(\phi_2 - \phi_1) = n\Phi_0 \quad (1.106)$$

と各ローブ内の領域は書くことができる (位相差  $\phi$  は  $2\pi$  の整数倍だけ不定である)。上式の左辺をフラクソイドと呼び、上式をフラクソイド量子化の関係と呼ぶ。自明のように  $K\phi L$  とフラクソイド量子化とは全く同一である。上記の  $n$  で指定される各ローブを  $n$  フラクソイドモードと呼ぶ場合もある。

(8) 自己磁束を考慮した場合の SQUID<sup>39)</sup>

図 1.63 で  $I_{c1} = I_{c2}$  とする。境界が加わると一般に  $I_1 \neq I_2$  となり、循環電流は  $I_{circ} = (I_2 - I_1)/2$ 、左右両接合の電流は  $(I_T/2) \pm I_{circ}$  となる。ループの自己インダクタンスを  $L$  とすると、全磁束および  $K\phi L$  は

$$\Phi = \Phi_{ex} + \frac{1}{2} LI_{c1} (\sin \phi_2 - \sin \phi_1) \quad (1.107)$$

$$\phi_2 = \phi_1 - (2\pi/\Phi_0) \left[ \Phi_{ex} + \frac{1}{2} LI_{c1} (\sin \phi_2 - \sin \phi_1) \right] \quad (1.108)$$

となる。式 (1.108) から  $\phi_2$  を  $\phi_1$  と  $\Phi_{ex}$  について解くと、式 (1.107) から全磁束、式 (1.104) から全電流を求めることができる。これらを  $\phi_1$  に関し極大化すれば  $\Phi_{ex}$  に対する  $I_T$  の臨界値  $I_{Tc}(\Phi_{ex})$  やそれに対応する全内部磁束  $\Phi$  および  $I_{circ}$  または  $\Phi_s$  を決定できる。図 1.66 は  $LI_{c1} = (5/\pi)\Phi_0$  の場合にこれらの関係を示したものである。図 1.66 (a) の  $(I_{Tc})_{max}$  と  $(I_{Tc})_{min}$  の差または比が大きいくほど DC SQUID の磁束検出器としての能力が高い。図 1.67 はこれら

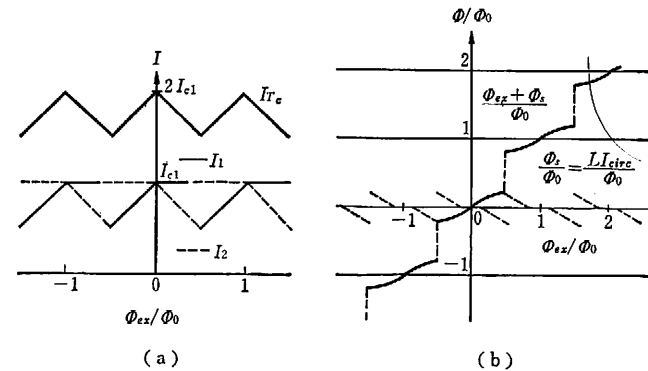


図 1.66 対称 DC SQUID で自己磁束を考慮した場合の全臨界電流および各接合電流 (a) および全磁束および自己磁束の外部磁束に対する関係 (b)

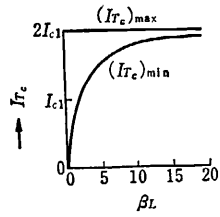


図 1-67 DC SQUID の外部磁束による全臨界電流の変調深さの  $\beta_L = \pi L I_{c1} / \Phi_0$  に対する依存性

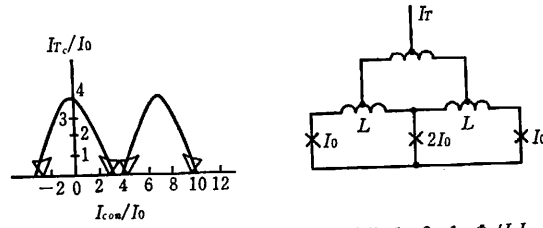


図 1-68 対称3接合干渉計(臨界電流比 1:2:1,  $\Phi_0/LI_c = 7$ )のしきい値特性

の  $\beta_L = \pi L I_{c1} / \Phi_0$  に対する依存性を示した。

$(I_{Tc})_{min}$  が 0 にならないのは  $I_{c1} = I_{c2}$  の対称型の場合  $\beta_L$  が大きく自己磁束が存在するためである。これはまた隣接するフラクソイドモード領域が重なりあっていると理解するほうが正確である。ただし、自己磁束が無視できる場合でも  $I_{c1} \neq I_{c2}$  と非対称のときは  $(I_{Tc})_{min}$  は 0 とならない。両原因を弁別するには接合の  $I_c$  が温度依存性を持ち、従って  $T \rightarrow T_c$  で  $\beta_L \rightarrow 0$  となることが利用できる。

図 1-68 は 3 接合 DC SQUID と呼ばれる<sup>34)</sup>。  $\Phi_{ex}$  の代わりに SQUID の近くに配線した制御線に流した電流  $I_{con}$  を用い  $I_{Tc} - I_{con}$  曲線を示してある。図はグラウンドプレーンがない場合であるが、あれば  $I_{Tc}$  軸に関し非対称になる。この回路では超電導ループが二つあり、それぞれにフラクソイド量子化の条件が課される。ゆえにフラクソイドモードは  $(m, n)$  の二つの整数を組合せて指定される。図の大きいローブは  $m=n$  の主ローブ、小さいほうは  $m=n \pm 1$  のローブである。3 接合 SQUID は主ローブ相互の分離が大きくなる点が応用上重要である。

以上 DC SQUID は  $I_{Tc}$  が  $\Phi_{ex}$  で  $\Phi_0$  周期で変調されることを利用して極めて高感度の磁力計、従って一般に電磁気量の計測に応用される。一方、 $I_{Tc}$  と  $\Phi_{ex}$  で決まる平面上のフラクソイドモードの曲線は、零電圧・電圧両状態の領域境界を与え、しきい値曲線と呼ばれる。そしてそれぞれの状態に 0 と 1 を対応させて論理応用の対象となる。フラクソイドモードの番号(量子数)を論理変数に選んで零電圧状態のみで論理応用を考えることもある。これをフラクソイド論理と呼ぶことがある。隣接するモード間遷移ではほぼ  $\Phi_0$  の磁束がループを出入りするから  $\Delta V \cdot \Delta t \sim \Phi_0$  ( $\Delta t$  は遷移時間) の関係の電圧パルス  $\Delta V$  が遷移が起きた目印

となる。フラクソイド論理は、消費電力が少なく、超電導エレクトロニクスの立場で追求できる極限的方式である。しかし他方、適当なループ面積 ( $L I_c \sim \Phi_0$ ) が必要で、集積化と遷移速度には問題を残している。

参 考 文 献

- 1) 超電導に関しては以下の成書がある。
  - a. P.G. DeGennes: Superconductivity of Metals and Alloys, W.A. Benjamin, Inc., (1966)
    - 渋谷, 育峰, 高山訳: 金属および合金の超伝導, 養賢堂 (1975)
  - b. M. Tinkham: Introduction to Superconductivity, McGraw Hill, (1975)
    - 小林訳: 超伝導現象, 産業図書 (1981)
  - c. A.G. Rose-Innes and E.H. Rhoderick: Introduction to Superconductivity 2nd ed., Pergamon Press, (1978)
    - 島本, 安河内訳: 超伝導入門, 産業図書, (1978)
  - d. T. Van Duzer and C.W. Turner: Principles of Superconductive Devices and Circuits, Elsevier North Holland, Inc., (1981)
    - 原, 菅原訳: 超伝導デバイスおよび回路の原理, コロナ社, (1983)
  - e. E.A. Lynton: Superconductivity 3rd ed., Methuen & Co. Ltd. (1969)
  - f. R.D. Parkes ed.: Superconductivity Vol. 1, Vol. 2, MerceL Dekker Inc., (1969)
  - g. F. London: Superfluids I Macroscopic Theory of Superconductivity, Dover Publications, (1960)
    - 井口訳: 超伝導のマクロ理論, 講談社, (1974)
  - h. 日本物理学会編: 超伝導, 丸善 (1979)
    - i. 中嶋貞雄: 超伝導入門, 培風館 (1971)
    - j. 電気学会大学講座: 超伝導工学, 電気学会 (1974)
  - k. W.D. Gregory, W.N. Mathews Jr. and E.A. Edelsack ed.: The Science and Technology of Superconductivity, Plenum Press (1973)
    1. K.E. Gray ed.: Nonequilibrium Superconductivity, Phonons, and Kapitza Boundaries, Plenum Press (1981) (NATO Advanced Study Institutes Series B 65)
- 2) ジョセフソン効果に関しては参考文献 1) 以下の成書がある。
  - a. 参考文献 1) d.
  - b. L. Solymar: Superconducting Tunneling and Applications, Chapman and Hall, (1972)
  - c. I.O. Kulik and I.K. Yanson: The Josephson Effect in Superconductive Tunneling Structures (translated by P. Gluck from Russian), Israel Program for Scientific Translations, (1972)
  - d. B.B. Schwartz and S. Foner ed.: Superconductor Applications: SQUID and Machines, Plenum, (1977)
  - e. B.S. Deaver Jr., C.M. Falco, J.H. Harris and S.A. Wolf ed.: Future Trends in Superconductive Electronics, AIP Conference Proceedings No. 44, American Institute of Physics, (1978)
  - f. 小野寺, 山下: 超伝導回路 (ジョセフソン電子回路素子), 共立出版 (情報科学講座 D-13-6), (1981)
  - g. 石田, 柳川, 吉清編: 超伝導集積回路, 電子通信学会 (1983)
  - h. 電気学会クライオエレクトロニクス常置専門委員会編: ジョセフソン効果<基礎と応用>, コロナ社 (1978)
  - i. 中村: クライオエレクトロニクス入門, オーム社 (1980)
  - j. V.L. Newhouse ed.: Applied Superconductivity Vol. 1, Vol. 2, Academic Press (New York) (1975)

- k. A. Barone and C. Paternò: Physics and Application of the Josephson Effect, John Wiley & Sons (1982)  
菅野、山下、太田訳: ジョセフソン効果の物理と応用, 近代科学社 (1986 初頭出版予定)
1. B. Deaver and J. Ruvalds eds.: Advances in Superconductivity: Plenum Press(1983)  
NATO Advanced Study Institutes Series B 100
  - 3) L.N. Cooper: Phys. Rev., 104, 1189 (1956)
  - 4) J. Bardeen, L.N. Cooper and J.R. Schrieffer: Phys. Rev., 108, 1175 (1957)
  - 5) W. Meissner and R. Ochsenfeld: Naturwissenschaften, 21, 787 (1933)
  - 6) 参考文献 1) g.
  - 7) A.B. Pippard: Proc. Roy. Soc., A 216, 547 (1953)
  - 8) C.J. Gorter and H.B.G. Casimir: Physica, 1, 306 (1934)  
C.J. Gorter and H.B.G. Casimir: Phys. Z., 35, 963 (1934); Z. Techn. Phys., 15, 539 (1934)
  - 9) V.L. Newhouse: Applied Superconductivity, John Wiley and Sons, pp. 103~105 (1964)
  - 10) R.L. Kautz: J. Appl. Phys., 49, 308 (1978)
  - 11) V.L. Ginzburg and L.D. Landau: J.E.T.P. USSR 20, 1064 (1950)
  - 12) J.C. Fisher and I. Giaever: J. Appl. Phys., 32, 173 (1961)
  - 13) I. Giaever: Phys. Rev. Lett., 5, 147 (1960)
  - 14) B.D. Josephson: Phys. Lett., 1, 251 (1962)  
P.W. Anderson: Phys. Today, 23, 23 (1970)
  - 15) R.P. Feynman, R.B. Leighton and M. Sands: The Feynman Lectures on Physics, Vol. III, Reading, Massachusetts: Addison-Wesley (1965) pp. 21~14  
砂川訳: ファインマン物理学, V 量子力学, p. 461, 岩波 (1979)
  - 16) V. Ambegaokar and A. Baratoff: Phys. Rev. Lett., 11, 104 (1963)
  - 17) C.S. Owen and D.J. Scalapino: Phys. Rev. 164, 538 (1967)  
S. Basavai and R.F. Broom: IEEE Trans. Magn., MAG-11, 759 (1975)
  - 18) G. Uehara, M. Nakanishi and K. Hara: Jpn. J. Appl. Phys., 22, 544 (1983)
  - 19) K.K. Likharev: Rev. Mod. Phys., 51, 10 (1979)
  - 20) W.J. Skocpol, M.R. Beasley and M. Tinkham: J. Appl. Phys., 45, 4045 (1974)
  - 21) W.C. Stewart: Appl. Phys. Lett., 12, 277 (1968)  
D.E. McCumker: J. Appl. Phys., 39, 3113 (1968)
  - 22) C.K. Bak and N.F. Pederson: Appl. Phys. Lett., 22, 149 (1973)  
S. Shin, T. Moriya, F. Shiota, K. Hara: Jap. J. Appl. Phys., 18, 2011 (1979)
  - 23) 参考文献 2) d. の T.A. Fulton の項参照 (pp. 125~187)
  - 24) Y. Taur, P.L. Richards and F. Auracker: Low Temp. Phys. LT-13, 3, Plenum Press, 276 (1974)
  - 25) S. Shapiro: Phys. Rev. Lett., 11, 80 (1963)
  - 26) E. Riedel: Z. Naturforsch., 19 a, 1634 (1964)
  - 27) F. Auracker and T. Van Duzer: J. Appl. Phys., 44, 845 (1973)
  - 28) 遠藤: 電総研研究報告第 819 号 (1981)
  - 29) T. Endo, M. Koyanagi and A. Nakamura: IEEE Trans. Instrum. and Meas., IM-32, 267 (1983)
  - 30) J. Niemeyer, J.H. Hinken and R.L. Kautz: Appl. Phys. Lett., 45, 478 (1984)
  - 31) D. Rogovin and D.J. Scalapino: Ann Phys., 86, 1 (1974)
  - 32) V. Ambegaokar and B.I. Halperin: Phys. Rev. Lett., 22, 1364 (1969)
  - 33) SQUID の計算に関しては R. de Bruyn Ouboter and A. Th. A.M. de Waele; "Superconducting point contacts weakly connecting two superconductors" in Progress in Low Temp. Phys. Vol. IV, C.J. Gorter (Ed), Amsterdam: North Holland and New York: American Elsevier, (1970) 参照
  - 34) H.H. Zappe: IEEE Trans. Magn., MAG-13, 41 (1977)

## 2 章 SQUID と低周波計測

### 2.1 超電導磁気センサの原理

#### (1) 超電導モジュレータ

前章で説明された超電導体の特異な性質を、高感度を必要とする計測に応用しようという試みは、かなり古くからあった。例えば、1930年代に、既に超電導コイルを用いたガルバノメータが試作されている。1950年代になると、熱的あるいは磁氣的に超電導状態と常電導状態の間をスイッチさせて働かせる超電導チョッパが工夫され、直流をいったん交流に変換して、増幅後、位相検波することによって微小直流電圧を測定する超電導チョッパ増幅器が現われた。これらは、入力信号を検出しやすい形に変換する段階で、主として超電導の完全導電性を利用して、信号エネルギーの損失や雑音の混入をできるだけ小さくすることに主眼が置かれている。しかし、超電導には、マイスナー効果をはじめ磁氣的にも特異な性質があり、これらも併せて計測技術にとり入れることが考えられたのは当然であろう。とりわけ、1960年代前半に検証された磁束の量子化現象やジョセフソン効果の諸相は、計測器の分野にとって極めて魅力がある現象で、高感度超電導磁束計の開発が活発になったのも、ちょうどこの時期である。

超電導磁束計で、磁気信号をピックアップするのは、リング状あるいはコイル状をした超電導閉ループである。超電導ループは、その内部を貫く磁束を一定に保とうとして(磁束の保存)、磁気信号に比例した減衰しない超電導電流(永久電流)を誘起する。この電流をなんらかの方法で検出すればよい。しかし、検出に必要なエネルギーを、この永久電流から取り出すことは望めない。そこで、検出器には別途エネルギーを補給して、入力信号のエネルギーを消費することなく、しかも入力信号に対応した出力を繰り返し取り出せるような工夫が必要となる。図2.1はその一例を模式的に示したものである。

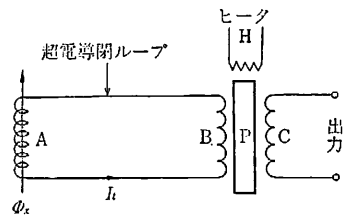


図 2.1 超電導モジュレータの原理図

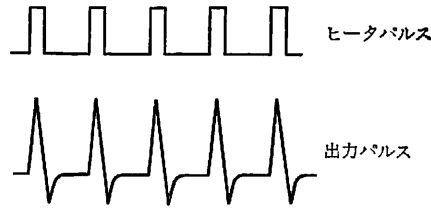


図 2.2 マイスナー効果モジュレータの出力信号

コイルAとコイルBは超電導閉ループをなし、コイルAに外部から磁界を印加すれば、閉ループには、レンツの法則に従って遮へい電流  $I_L$  が誘起される。 $I_L$  は逆にコイルBで磁界を発生する。コイルBの芯には、超電導体の棒Pが入っていて、ヒータHでPを超電導状態から常電導状態に転移させれば、マイスナー効果で排除されていた磁束がPの内部に入り込む。ヒータ電流を切るとPは超電導状態に戻り、再びPから磁束が排除される。この磁束の出入りをコイルCに発生する電圧として観測できる。例えば、ヒータに方形パルス電流を加えると図2.2のような出力が期待できる。

ここで、超電導棒Pの役割を考えてみよう。ヒータ電流のon-offに従ってコイルBを貫く磁束が変化するふるまいを、回路的にはコイルBの有効インダクタンスの変化ととらえることができる。すなわち、Pはインダクタンス変調器(モジュレータ)とみなせる。コイルBの有効インダクタンスの変化に伴って超電導電流  $I_L$  も変化するが、Pが元の状態に戻れば  $I_L$  も元の値に戻るから、信号エネルギーの正味の損失は零である。しかし、この過程で、ヒータに加えられたエネルギーの一部が出力に変換されている。超電導状態にあるPが磁界中にあるとき、その表面の磁界の侵入深さ  $\lambda_L$  程度の円環状部分に遮へい電流が流れている。ヒータ電流のon-offによってこの遮へい電流がoff-onされ、ここで電磁エネルギーの補給と消費が繰り返されているのである。

このような中の詰まった超電導体のモジュレータは、マイスナー効果モジュレータと呼ばれる。マイスナー効果モジュレータを用いると、図2.3の(a)に示すように、出力の大きさは直流入力磁気信号に比例する。これに対して、中空の超電導円筒をモジュレータとして用いると、得られる出力の大きさは図2.3の(b)のように周期的になる。中空円筒では、ヒータ電流のon-offに応じて変化する磁束は、コイルBによってモジュレータに与えられる磁束と、その磁束に最

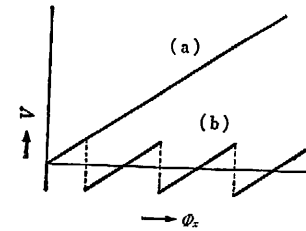


図 2.3 マイスナー効果モジュレータ (a) と量子化磁束モジュレータの応答 (b)

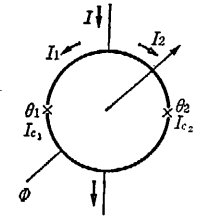


図 2.4 DC SQUID の原理回路

も近い磁束量子の整数倍  $n\phi_0$  との差だけになるからである。このようなモジュレータは量子化磁束モジュレータと呼ばれる。出力信号のパワーは、モジュレータの駆動周波数に比例するため、感度向上には、熱的応答の改善が容易な量子化磁束モジュレータのほうが有利とされている。電気的なヒータの代わりに光で変調を試みた例もある。いずれにせよ、繰返し周波数はマイスナー効果モジュレータで数十 kHz、量子化磁束モジュレータで数 MHz が限度のようで、それぞれ 100 pT および 10 pT 程度の磁界感度が報告されている。また、Nb 膜を蒸着した水晶発振器をモジュレータにして、機械的振動により回路のインダクタンスを高周波変調し、0.5 pT 程度の磁界感度を得たという報告もある。

量子化磁束モジュレータに弱接点を一つあるいは二つ加えた超電導素子は、超電導リングへの磁束の出入口を局所化した超電導モジュレータとみなせる。前者は、RF SQUID と呼ばれ、通常ラジオ周波数の交流磁束で駆動される。後者は DC SQUID と呼ばれ、弱接合に直流を流してジョセフソン発振の高周波で磁束を円筒に出入りさせる素子である。どちらも熱や機械的振動を介さないで、純粋に電磁気学的に駆動できる点で扱いやすく、しかも極めて低雑音の素子になる。現在 SQUID は超電導磁束計の主流となり、実用計器として完成の域にほぼ達していることもあって、その動作原理は、モジュレータの一種としてよりも、むしろそれぞれ固有の視点から説明されるのが常のようである。

## (2) DC SQUID

図2.4の模式図で示されるような弱接合を二つ含む超電導リングを考える。リングには外部から電流  $I$  を流すことができ、また内部を磁束  $\phi$  が貫いているものとしよう。弱接合として、トンネル接合・点接触接合(ポイントコンタクト)・超電導ブリッジ等、どの型の接合でもよいが、その電流-電圧特性にヒステリシ

スがなく、電圧ゼロのまま小さな DC ジョゼフソン電流

$$I_1 = I_{c1} \sin \theta_1, \quad I_2 = I_{c2} \sin \theta_2 \quad (2.1)$$

が流れ得るものとする。\$\theta\_1\$ と \$\theta\_2\$ はそれぞれ接合 1, 2 における位相のとびである。この超電導リングは、見方を変えれば二つの超電導弱接合の並列回路でもある。従って、電圧の発生を伴わない範囲で、外部からこの超電導回路に流し得る電流は

$$I = I_1 + I_2 = I_{c1} \sin \theta_1 + I_{c2} \sin \theta_2 \quad (2.2)$$

となる。一方、この超電導リングにおけるフラクソイドの量子化条件は、\$\theta\_1\$ と \$\theta\_2\$ を用いて

$$\Phi + \frac{\Phi_0}{2\pi}(\theta_1 - \theta_2) = n\Phi_0 \quad (2.3)$$

と表現できる。左辺第 2 項は弱接合における超電導電流のカイネティックモーメントからの寄与である。式 (2.3) を条件として、式 (2.2) で表わされる超電導電流の最大値 \$I\_m\$ を求めると

$$I_m = \left\{ (I_{c1} - I_{c2})^2 + 4I_{c1}I_{c2} \cos^2 \frac{\pi\Phi}{\Phi_0} \right\}^{1/2} \quad (2.4)$$

となる。特に二つの弱接合が同じ特性を持っていて、\$I\_{c1} = I\_{c2} \equiv I\_c\$ なら

$$I_m = 2I_c \left| \cos \frac{\pi\Phi}{\Phi_0} \right| \quad (2.5)$$

となる。式 (2.4) や式 (2.5) からわかるように、\$I\_m\$ は二つの弱接合の臨界電流の単純和にはならず、リングを貫いている磁束 \$\Phi\$ の周期関数となる (図 2.5)。その周期は、磁束量子 \$\Phi\_0 = 2.07\$ [fWb] である。これは、二つのスリットを用いたヤングの実験における光の干渉に対比できる超電導電流の干渉効果である。弱接合はスリットの役割を果たし、\$\phi\$ および \$\phi\_0\$ は、それぞれ光路差と波長に対応する。SQUID という名称も超電導量子干渉計 (Superconducting Quantum Interference Device) を略したもので、もともとこのような干渉効果を利用して、\$\Phi\_0\$ を尺度に磁束が測定できる磁気センサを意味する。

SQUID の接合 1 と 2 に流れる電流 \$I\_1\$ と \$I\_2\$ は、フラクソイドの量子化条件の式 (2.3) による制約を受けているため、一般的には一致しない。従って、その差

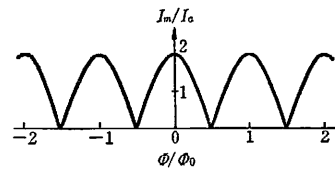


図 2.5 DC SQUID の \$I\_m\$-\$\Phi\$ 特性

$$2I_s = I_{c2} \sin \theta_2 - I_{c1} \sin \theta_1 \quad (2.6)$$

から決まる循環電流 \$I\_s\$ が存在する。これまでは、\$I\_s\$ の作る磁束も繰り込んだものを \$\Phi\$ として議論してきた。これに対して、仮想的に弱接合が完全に切れてしまった場合 (\$I\_{c1} = I\_{c2} = 0\$) にリングを貫いているであろう磁束 \$\Phi\_x\$ を考えてみよう。\$\Phi\_x\$ は \$I\_s\$ からの寄与を含まないから、外部から SQUID に印加されたなまの磁束とみなせる。\$I\_s\$ は本質的には遮へい電流で \$\Phi\$ の変化を小さくする方向に流れるから

$$\Phi = \Phi_x - LI_s \quad (2.7)$$

と書ける。以後、\$\Phi\$ と \$\Phi\_x\$ を区別するため、それぞれ内部磁束および外部磁束と呼ぶことにする。

SQUID を用いて測定したいのは、通常、外部磁束 \$\Phi\_x\$ である。そこで、ゼロ電圧のまま SQUID に流し得る最大電流 \$I\_m\$ も、\$\Phi\$ ではなく \$\Phi\_x\$ の関数として見直さなければならない。簡単のため、\$I\_{c1} = I\_{c2} \equiv I\_c\$ の場合について、式 (2.5)、式 (2.6)、式 (2.7) から計算した結果の一例を図 2.6 に示した。\$I\_m\$ は \$\Phi\_x\$ に対しても \$\Phi\_0\$ を周期に変化するのだから、\$I\_m\$ を介した磁束の測定が可能である。しかし、\$\Phi\_x\$ を 0 から \$\Phi\_0/2\$ まで変化させたときの \$I\_m\$ の変化分 \$\Delta I\_m\$ は、\$\Phi\$ を 0 から \$\Phi\_0/2 - LI\_s\$ まで変えたときの変化分にしかない。その結果、\$LI\_c/\Phi\_0 \ll 1\$ の場合、\$\Phi \sim \Phi\_x\$ であるから \$I\_m \sim 2I\_c |\cos(\pi\Phi\_x/\Phi\_0)|\$、従って \$\Delta I\_m/2I\_c \sim 1\$ となって臨界電流の変調度は大きい。一方、\$LI\_c/\Phi\_0 \gg 1\$ の場合は、\$LI\_s \sim |\Phi\_x - n\Phi\_0|\$ であるから \$I\_m \sim 2(I\_c - |\Phi\_x - n\Phi\_0|/L)\$、従って \$\Delta I\_m/2I\_c \sim \Phi\_0/2LI\_c \ll 1\$ となって臨界電流の変調度は小さくなる。図 2.7 に \$LI\_c/\Phi\_0\$ の中間的な値に対して数値計算した結果を示してある。しかし、概略値ならば内挿式

$$\frac{\Delta I_m}{2I_c} = \frac{\Phi_0}{\Phi_0 + 2LI_c} \quad (2.8)$$

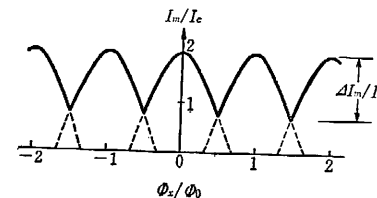


図 2.6 DC SQUID の \$I\_m\$-\$\Phi\_x\$ 特性

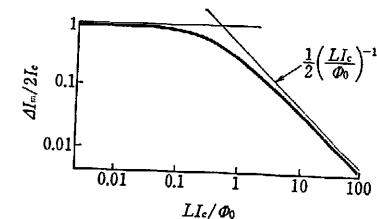


図 2.7 臨界電流の変調度

を使って近似的に見積ることもできる。実際に DC SQUID を作るには、 $LI_c \sim \Phi_0$  となるよう調整して、単に  $\Delta I_m$  だけでなく変調度  $\Delta I_m/2I_c$  も小さくならないよう配慮が必要である。

二つの弱接合の特性が少し異なっている非対称な DC SQUID では ( $I_{c1} \neq I_{c2}$ )、 $I_m - \Phi$  特性は対称のままであるが、 $I_m - \Phi_x$  特性に焼き直すとひずんで非対称となる。この場合、 $I_m$  が最大になるのは  $\Phi_x = n\Phi_0$  から  $(L/2)(I_{c1} - I_{c2})$  だけずれたところで、その値は  $I_{c1} + I_{c2}$  である。

図 2・8 のように、直流電流源を DC SQUID に接続して、流す電流を  $I_m$  以上にすると直流電圧  $V$  が発生する。有限電圧のもとでは、弱接合に準粒子電流も流れる。また、AC ジョゼフソン効果に従って各接合における位相のとび  $\theta_1$ 、 $\theta_2$  も時間的に変化し、超電導電流に交流成分が生ずる。しかし、直流定電流源は、これらのすべての電流の和を一定に保とうとするから、逆に電圧  $V$  が時間的に変化してつじつまを合せようとする。いま簡単のため二つの弱接合の特性が等しく、しかも準粒子トンネルコンダクタンスは各接合の常電導トンネル抵抗  $R_J$  の逆数で表現できる (RSJ モデル) 場合を考えよう。更に接合の静電容量が小さく変位電流を無視できると仮定すれば

$$I = I_1(t) + I_2(t) = \text{const.} \quad (2.9)$$

$$2I_s(t) = I_2(t) - I_1(t) \quad (2.10)$$

$$I_1(t) = I_c \sin \theta_1 + \frac{\Phi_0}{2\pi R_J} \cdot \frac{d\theta_1}{dt} \quad (2.11)$$

$$I_2(t) = I_c \sin \theta_2 + \frac{\Phi_0}{2\pi R_J} \cdot \frac{d\theta_2}{dt} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{\Phi_0}{2\pi} \cdot \frac{d\theta_1}{dt} + L_0 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} \\ &= \frac{\Phi_0}{2\pi} \cdot \frac{d\theta_2}{dt} + L_0 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} \end{aligned} \quad (2.13)$$

となる。二つの分枝の部分インダクタンス  $L_0$  と相互インダクタンス  $M$  を使ってリングの自己インダクタンス  $L = 2(L_0 - M)$  を表現すると、式 (2.13) は

$$V(t) = \frac{\Phi_0}{2\pi} \cdot \frac{d\theta_1}{dt} - \frac{L}{2} \cdot \frac{dI_s}{dt} = \frac{\Phi_0}{2\pi} \cdot \frac{d\theta_2}{dt} + \frac{L}{2} \cdot \frac{dI_s}{dt} \quad (2.14)$$

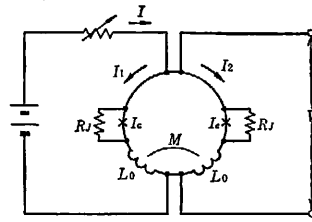


図 2・8 DC SQUID の等価回路

と書き換えられる。更に、これらの式と式 (2.3)、式 (2.7) を使えば、最終的に次の一組の関係式が得られる。

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{2\pi R_J}{\Phi_0} \left( \frac{1}{2} I - I_s - I_c \sin \theta_1 \right) \quad (1.15)$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \frac{2\pi R_J}{\Phi_0} \left( \frac{1}{2} I + I_s - I_c \sin \theta_2 \right) \quad (1.16)$$

$$I_s = \frac{\Phi_0}{L} \left( \frac{\Phi_x - n\Phi_0}{\Phi_0} - \frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi} \right) \quad (1.17)$$

$$V(t) = \frac{\Phi_0}{4\pi} \left( \frac{d\theta_1}{dt} + \frac{d\theta_2}{dt} \right) = \frac{R_J}{2} (I - I_c \sin \theta_1 - I_c \sin \theta_2) \quad (1.18)$$

直流電圧計で測定するのは、この変動する  $V(t)$  を時間的に平均した値  $\bar{V}$  と考えてよい。もちろん、連立方程式 (2.15)~式 (2.18) は解析的には解けないので、一般的には数値計算に頼らなければならない。しかし、特別な場合として、 $LI_s$  が小さく環流電流による遮へい効果が無視できるなら、 $LI_s = 0$  あるいは  $\Phi_x = \Phi$  と置いて  $\bar{V}$  を計算できる。すなわち

$$\bar{V} = \begin{cases} 0 & (I < I_m) \\ (R_J/2)(I^2 - I_m^2)^{1/2} & (I \geq I_m) \end{cases} \quad (2.19)$$

これは短絡常電導抵抗  $R_J/2$  を持った単一ジョゼフソン接合 (RSJ モデル) の  $I - \bar{V}$  特性と同じ形をしている。 $I_m$  を外部磁束  $\Phi_x$  に依存するパラメータとして取り扱えば、双曲線関係式 (2.19) は DC SQUID の  $I - \bar{V}$  特性を説明する際便利な近似式としてよく使われる。

ここで少し DC SQUID の超電導モジュレータとしての役割に触れておこう。 $I_m$  より大きな直流バイアス電流  $I_0$  を流して直流電圧  $\bar{V}$  が生じている状態では、交流ジョゼフソン効果によって弱接合における位相差  $\theta_1$ 、 $\theta_2$  が平均変化速度  $2\pi\bar{V}/\Phi_0$  で変化している。その結果、流れる電流の交流成分に伴って、一方の接合から超電導リング内へ磁束が入り、もう一方の接合から出ていく。これを別のいい方をすれば、DC SQUID において、接合の持つカイネティックインダクタンスがジョゼフソン周波数  $\bar{V}/\Phi_0$  で時間的に変化し、このとき生ずる超電導リングへの磁束の出入りを電圧  $\bar{V}$  として取り出していることになる。バイアス電流から DC SQUID に供給されるエネルギー  $I\bar{V}$  の一部が出力信号のエネルギーになり、残りは主に準粒子電流のジュール損失として費やされている。

既に説明したように、 $I_m$  は外部磁束  $\Phi_x$  の周期関数である。従って、直流電

流源から DC SQUID に流す電流を一定値に固定しておく、発生する電圧  $\bar{V}$  は、 $\Phi_x$  の変化に対し  $I_m$  と同じ周期  $\Phi_0$  で応答する (図 2・9)。このように、DC SQUID では、直流バイアス電流  $I_b$  を流しておいて発生する電圧  $\bar{V}$  の変化を通じ磁束  $\Phi_x$  の検出が可能である。例えば、リングで囲む面積を  $S_R=2$  [mm<sup>2</sup>]、自己インダクタンスを  $L=1$  [nH] とし、 $LI_c \cong \Phi_0$  を満たすために  $I_c=2$  [ $\mu$ A] に調整したとしよう。近似式 (2・8) を用い

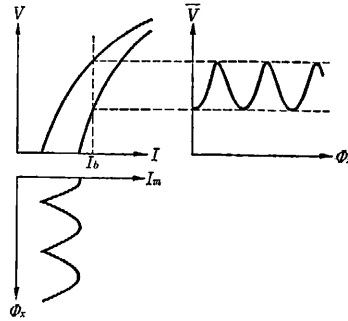


図 2・9 DC SQUID の動作

ば、 $\Phi_x$  を変えることにより臨界電流は  $\Delta I_m=1.3$  [ $\mu$ A] だけ変調を受けることがわかる。この DC SQUID の接合抵抗を  $R_J=5$  [ $\Omega$ ] とし、直流バイアス電流が  $I_b=2I_c=4$  [ $\mu$ A] だけ流れていたとすると、式 (2・19) から見積られる電圧の変化は  $\Delta V \sim 7$  [ $\mu$ V] となる。一方、周期  $\Phi_0$  を磁界に換算すると  $B=\Phi_0/S_R \cong 1$  [nT] で、平均の磁束-電圧変換係数は  $\partial V/\partial \Phi_x \sim 2 \Delta V/\Phi_0 \sim 7 \times 10^6$  [V/Wb]、あるいは平均磁界-電圧変換係数は  $\partial V/\partial B \sim 1.4 \times 10^4$  [V/T] になる。

(3) RF SQUID

図 2・10 のように、弱接合を一つ含む超電導リングを RF SQUID と呼ぶ。このリングを貫いている磁束  $\Phi$  と弱接合における位相のとび  $\theta$  との間には、フラクソイドの量子化条件

$$\Phi - \frac{\theta}{2\pi} \Phi_0 = n\Phi_0 \quad (2 \cdot 20)$$

が成り立っている。この式と弱接合における電流-位相関係

$$I_c = I_c \sin \theta \quad (2 \cdot 21)$$

を使って内部磁束と外部磁束の関係

$$\Phi = \Phi_x - LI_c \quad (2 \cdot 22)$$

を書き替えると

$$\Phi_x = \Phi + LI_c \sin \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} \quad (2 \cdot 23)$$

を得る。式 (2・23) は、図 2・11 のように直線  $\Phi = \Phi_x$  にかつわり付く曲線を表わしている。超電導リングによ

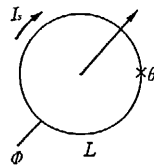


図 2・10 RF SQUID の原理回路

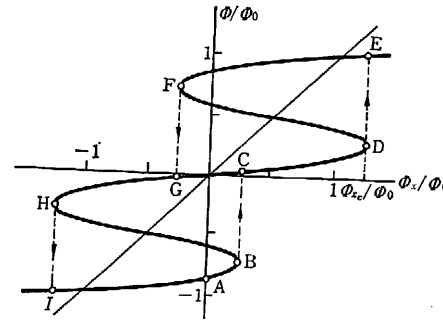


図 2・11 RF SQUID の  $\Phi$ - $\Phi_x$  特性 ( $\alpha_L=2\pi$ )

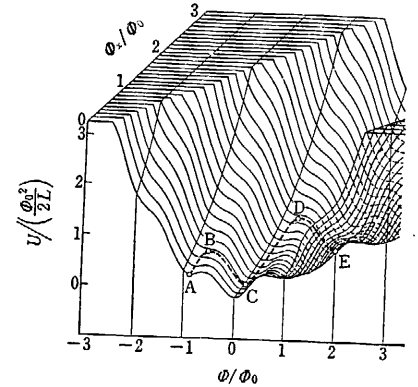


図 2・12 RF SQUID のポテンシャルエネルギー ( $\alpha_L=2\pi$ )

る遮へい効果の大きさを無次元化して  $\alpha_L=2\pi LI_c/\Phi_0$  と置く。弱接合のカイネティックインダクタンスが  $L_J \sim \Phi_0/2\pi I_c$  であるから、 $\alpha_L$  はリングの電磁インダクタンスと弱接合のカイネティックインダクタンスの比  $L/L_J$  という物理的意味を持っている。 $\alpha_L \leq 1$  のとき、 $\Phi$  は  $\Phi_x$  の 1 価関数であるが、 $\alpha_L > 1$  のときは多価関数になる。ある  $\Phi_x$  に対し、実際にとり得る  $\Phi$  の値を調べるため、状態のエネルギーを考察してみよう。SQUID リングのエネルギーは、遮へいしている磁気エネルギーと弱接合における位相結合のエネルギーを合せて

$$U(\Phi) = \frac{1}{2L} (\Phi - \Phi_x)^2 - \frac{I_c \Phi_0}{2\pi} \cos \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} \quad (2 \cdot 24)$$

と書ける。 $\Phi$  を状態変数と考えれば、 $U$  は SQUID リングのポテンシャルエネルギーとみなしてよく、その極値を与える条件  $\partial U/\partial \Phi = 0$  は式 (2・23) にほかならない。従って、 $\alpha_L \leq 1$  のとき、 $U$  は  $\Phi_x$  のいかににかかわらず極小値を一つしか持たないので、実現される状態は一義的に決まる。ところが、 $\alpha_L > 1$  のときは、図 2・12 のように、少なくともある範囲の  $\Phi_x$  に対してエネルギーの極小が複数個現われる。図 2・11 の  $\Phi$ - $\Phi_x$  曲線で、右上がりの部分はエネルギー極小の軌跡であり、実現可能な安定状態である。一方、右下がりの部分は、エネルギー極大の軌跡に対応していて、不安定で実現されない状態である。

$\Phi_x$  を 0 から大きくしていったとき、実際にとり得る SQUID リングの状態、すなわち  $\Phi$  の変化を図 2・11 と図 2・12 を対照させながら追ってみよう。最初の状態を A 点とする。外部磁束  $\Phi_x$  を大きくしていくと、状態はポテンシャルの谷

筋に沿って登っていく。やがてB点に達すると、それまでポテンシャルの極小点であった状態が単なる変曲点に変わるので、よりエネルギーの低い隣の谷筋にあるC点に飛び移る。 $\Phi_x$ を更に増していくと、D点で再びE点に飛び移る。逆に $\Phi_x$ を小さくしていくと、E→F→G→H→Iとエネルギー極小の道筋をたどって状態が変化していくため、ヒステリシスを描くことになる。一つのヒステリシスループC→D→E→F→G→Cの $\Phi$ - $\Phi_x$ 平面における面積を $\eta\Phi_0^2$ とすると、 $\alpha_L \leq 1$ のときは $\eta=0$ 、 $\alpha_L$ が大きくなると $\eta=\alpha_L/\pi$ に漸近していく。 $\alpha_L$ の中間的な値に対しては、内挿式

$$\eta = \frac{\alpha_L(\alpha_L - 1)}{\pi(\alpha_L + 1)} \quad (2.25)$$

で近似できる。実用的なSQUIDは、大抵 $\eta \sim 1$ で働かせる。

RF SQUIDの過渡的変化を記述する $\Phi$ の一般的な運動方程式は

$$C_J \frac{d^2\Phi}{dt^2} + G_J \frac{d\Phi}{dt} + \frac{dU}{d\Phi} = 0 \quad (2.26)$$

である。内部磁束の変化による起電力 $V=d\Phi/dt$ は、接合にかかる電圧となる。 $C_J$ は接合の静電容量で、運動方程式(2.26)の第1項は変位電流を表わしている。準粒子トンネル電流を表わす第2項には、SQUIDにおけるエネルギーの散逸をすべて繰り込んだものとする。従って、 $G_J$ は非線形の準粒子トンネルコンダクタンスであるが、RSJモデルでは $V$ や $\Phi$ に依存しない常電導トンネル抵抗 $R_J$ の逆数で近似される。外部磁束 $\Phi_x$ の変化が十分に緩やかで、SQUIDがポテンシャルの谷筋に沿う状態にあるときは、内部磁束 $\Phi$ の変化も十分に緩やかで $d\Phi/dt=0$ と置いてよい。従って、G→C→DやE→Fの過程では、外場がSQUIDに加えた仕事は、SQUIDリングのポテンシャルの変化として蓄えられ、消費しない。しかし、 $\Phi$ にとびの生ずるD→EやF→Gの過程では、式(2.26)の第2項を通じてエネルギーが消費される。つまり、ヒステリシスループに伴うエネルギー $\Delta W = \eta\Phi_0^2/L$ は、D→EとF→Gの二度 $\Phi$ がとぶそれぞれ $\tau \sim L/R_J$ の間に消費されるのである。典型的な値として、 $\eta=0.5$ 、 $L=1$  [nH]、 $R_J=10$  [ $\Omega$ ]を代入すると、 $\Delta W=2 \times 10^{-21}$  [J]、 $\tau \sim 0.1$  nsとなる。この $\tau$ を尺度にして、ゆっくりしたSQUIDの応答は、静特性をもとにして議論できる。

図2.13のように、コンデンサとコイルからなるタンク回路をSQUIDと誘導的(inductive)に結合した系を考えよう。コンデンサの静電容量を $C_t$ 、コイルの自己インダクタンスを $L_t$ 、コイルとSQUIDの結合係数を $k$ 、従って相互イ

ンダクタンスを $M_t = k\sqrt{LL_t}$ とする。 $k \ll 1$ ならば、共鳴角周波数は $\omega_0 = (L_t C_t)^{-1/2}$ である。実際には、 $\omega_0/2\pi = 20$  [MHz]程度のラジオ波がよく選ばれる。さて、この系に周波数 $\omega_0$ 、振幅 $I_{RF}$ の高周波電流を加えると、タンク回路はエネルギーを蓄えるので、コイルに流れる電流の振幅は $Q$ 値だけ増幅されて $QI_{RF}$ となる。その結果、タンク回路には振幅

$$V_{RF} = \omega_0 L_t Q I_{RF} \quad (2.27)$$

の高周波電圧が現われ、SQUIDには振幅

$$\Phi_{RF} = M_t Q I_{RF} \quad (2.28)$$

の高周波外部磁束が加わることになる。いま、SQUIDに加わっているのはこの高周波磁束だけで、他に直流的な磁束 $\Phi_{DC}$ が全くかかっていないと仮定しよう。 $I_{RF}$ が小さいうちは、上記のように $\Phi_{RF}$ も $I_{RF}$ に比例するため、図2.11の原点を中心に小振動する。高周波といっても、 $\omega_{RF}^{-1}$ は前述の時定数 $\tau$ に比べると大きいので、この振動はSQUIDにとって十分ゆっくりとした変化と考えるとよく、エネルギーの消費はほとんどない。いい換えれば、SQUIDはタンク回路に対し散逸的な負荷にはならない。ところが、 $I_{RF}$ をだんだん大きくしていき、 $\Phi_{RF}$ が臨界値 $\Phi_{xc}$ に達すると、図2.11のD→Eに相当する $\Phi$ のとびが生じ、ヒステリシスループを1周描くことになる。この過程で、SQUIDはエネルギーを $\Delta W = \eta\Phi_0^2/L$ だけ消費し、その分だけタンク回路の散逸的な負荷が増加する。このことは、瞬間的にタンク回路の実効的 $Q$ 値が低下したことになるので、 $\Phi_{RF}$ も $V_{RF}$ も小さくなる。 $\Phi_{RF}$ が $\Phi_{xc}$ より小さくなれば、SQUIDはヒステリシスループを周回しなくなる。従って、タンク回路は再びSQUIDに $\Phi_{RF} = \Phi_{xc}$ の高周波磁束を与えるに十分な $V_{RF}$ を回復するまでエネルギーをチャージし始める。その結果、 $I_{RF}$ を $\Phi_{xc}/QM_t$ より大きくしても $V_{RF}$ の最大値は一定で

$$V_c = \frac{\omega_0 L_t \Phi_{xc}}{M_t} \quad (2.29)$$

に固定されてしまう。しかし、 $I_{RF}$ をどんどん大きくしていくと、 $V_{RF}$ の回復が速くなって、やがて1サイクルの間に外部から加わる高周波電流によるエネルギーの補給が、SQUIDのたどるヒステリシスループで失われるエネルギーよりも

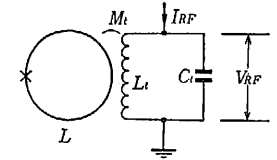


図2.13 タンク回路と結合したRF SQUID

大きくなってしまふ。このとき  $V_{RF}$  は再び上昇し始め、次のヒステリシスループが  $V_{RF}$  を制限するようになるまで続く。このようなタンク回路のふるまいを観測するために  $\omega_{RF}^{-1}$  より長い時定数で検波すると、 $V_{RF}$  としては常に最大値を見ることになるので、図 2.14 に示すような階段状の  $V_{RF}-I_{RF}$  特性が得られる。通常、この特性曲線の水平部を step、立ち上がり部を riser と呼んでいる。隣り合う step と step の間の電圧差は

$$V_0 = \frac{\omega_0 L_L \phi_0}{M_L} \quad (2.30)$$

一つの step の長さは

$$I_{step} = \frac{2M_L \Delta W}{\pi L_L \phi_{x_0}} \quad (2.31)$$

で与えられる。なお、 $\phi_{DC} = n\phi_0$  のときは、 $\phi-\phi_x$  平面上での動作の中心点がずれるだけで、 $V_{RF}-I_{RF}$  特性曲線は  $\phi_{DC}=0$  のときと完全に同じであるが、 $\phi_{DC} \neq n\phi_0$  のときは階段状構造が少し変化する。図 2.14 には、 $\phi_{DC} = (n + 1/2)\phi_0$  のときのふるまいも示しておいたが、もっと一般の  $\phi_{DC}$  に対するふるまいも容易に想像がつくであろう。

RF SQUID の  $V_{RF}-I_{RF}$  特性(図 2.14)は、DC SQUID の  $\bar{V}-I$  特性(図 2.9)と同じように直流的外部磁束に対して  $\phi_0$  を周期とした変化をする。そこで、DC SQUID の直流バイアス電流と同じように、 $I_{RF}$  を適当な値、例えば図 2.14 の  $I_b$  のように設定しておいて、 $\phi_{DC}$  を変化させると、 $V_{RF}$  は図 2.15 のように振幅が  $V_0/2$ 、周期  $\phi_0$  の三角波的応答をする。このように RF SQUID は、RF バイアス電流  $I_b$  で動く磁束計になることがわかる。見方を変えれば、RF SQUID は RF

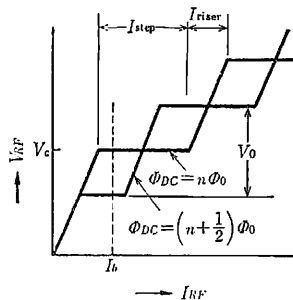


図 2.14 RF SQUID の  $V_{RF}-I_{RF}$  特性

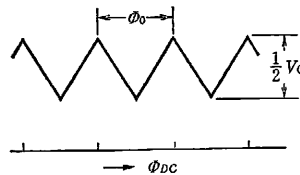


図 2.15 RF SQUID の三角波的  $V_{RF}-\phi_x$  特性

バイアス電流でインピーダンスを変調して、入力信号  $\phi_{DC}$  に依存した電圧出力を取り出す量子化磁束モジュレータの一種であるといえよう。典型的な数値例として、 $\omega_0/2\pi = 20$  [MHz],  $L_L = 0.2$  [ $\mu$ H],  $M = 3$  [nH] を使えば、三角波の振幅は  $V_0/2 \sim 8 \mu$ V となる。従って、磁束-電圧変換係数は  $\partial V_{RF}/\partial \phi_{DC} \cong V_0/\phi_0 \sim 8 \times 10^9$  [V/Wb] で、DC SQUID の場合とほぼ等しい。

## 2.2 SQUID 回路と素子パラメータ

### (1) 磁束ロック回路

前節で調べたように、DC SQUID も RF SQUID も入力磁気信号に対して  $\phi_0$  を周期とした周期的に変化する電圧出力を出す。この特異な応答を使えば、もちろん磁束を  $\phi_0$  単位で測定できる。ピックアップするリングの囲む面積を例えば  $2 \text{ mm}^2$  とすれば、 $\phi_0$  は  $1 \text{ nT}$  の磁界に相当する。地磁気は  $50 \mu\text{T}$  程度であるから、 $\phi_0$  単位でもかなり弱磁界の測定といえよう。しかし、小信号に対する磁束-電圧変換係数  $\partial V/\partial \phi_x$  が十分大きいのであるから、 $\phi_0$  より更に細かく磁束を分解できるはずである。それには、 $V-\phi_x$  特性が図 2.9 や図 2.14 のように非線形のままではむずかしいので出力を線形化する必要がある。この目的で考案された方式が磁束ロック法と呼ばれるもので、基本的には平衡を自動的にとる零位法の一つである。

図 2.16 は DC SQUID に対する磁束ロック回路のブロック図である。まず、AF 発振器から交流電流を変調用コイルに流すと、SQUID には小振幅の交流磁束  $\phi_{AF}$  が印加される。この  $\phi_{AF}$  の振幅が一定であっても、SQUID の応答は、直

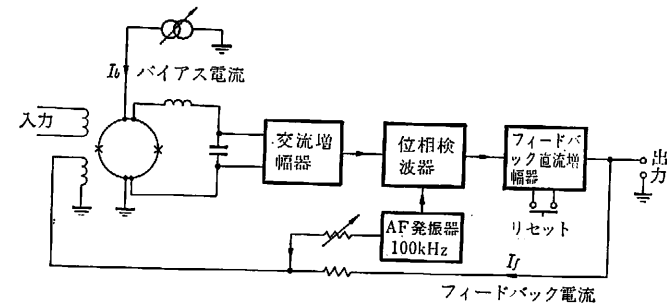


図 2.16 DC SQUID の磁束ロック回路の構成

流的な入力信号磁束  $\Phi_{AF}$  の値に依存する。すなわち、 $V-\Phi_{AF}$  特性曲線のどの位置が動作点となって  $\Phi_{AF}$  に対する応答を見ているかによって、図 2-17 に示すように出力の振幅・位相ともに変化するのである。この出力を増幅した後、AF 発振器からの基準信号と比べて位相検波すれば、 $V-\Phi_{AF}$  特性曲線の微分  $\partial V/\partial \Phi_{AF}$  に比例した信号が得られる。これを更に積分型増幅器を通して SQUID にフィードバックすれば、SQUID の動作点は  $V-\Phi_{AF}$  特性曲線の山か谷に固定される。これを磁束のロックという。磁束がロックされる点は  $\partial V/\partial \Phi_{AF}=0$  となる点で、それが実際には山になるか谷になるかはフィードバックの極性による。また、無数にある山（あるいは谷）のうちどの山（あるいは谷）にロックされるかは不定であるが、リセットボタンを押すことによって、フィードバック電流が最小になるところにロック点を移せるように回路設計をしておく。つまり、磁束ロック回路とは、一度リセットすればそのときに決まる動作点を基点として、微分出力  $\partial V/\partial \Phi_{AF}$  が常にゼロになるようフィードバック用コイルに流す電流を加減して、入力信号の変化を自動的に打ち消すような工夫をした回路である。従って、このフィードバック電流を読み出せば、 $\Phi_{AF}$  の変化に対して線形化した出力を得たことになる。図 2-18 は、RF SQUID の基本回路構成例である。この回路で、まずフィードバックスイッチを off にして、モード選択スイッチで RF モードにすれば、RF バイアス電流に振幅変調がかかり、モニタのオシロスコープには図 2-14 に相当する階段状パターンが見られる。AF モードに切り換えれば図 2-15 の三角波パターンが得られる。AF モードのまま、フィードバックスイッチを on にし、AF 波の振幅を  $\Phi_{AF} < \Phi_0$  に絞れば磁束ロック回路になり、線形化された出力が取り出せるようになっている。

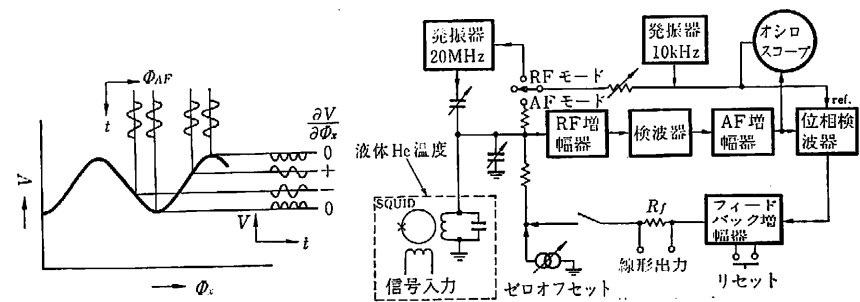


図 2-17 小振幅の交流磁束  $\Phi_{AF}$  に対する SQUID の応答

図 2-18 RF SQUID の基本回路構成の例

実際にこの磁束ロック法によって、信号磁束  $\Phi_{AF}$  を  $10^{-4}\Phi_0$  よりも細かく分解することも可能になった。このとき用いられる磁束変調の周波数  $\omega_{AF}/2\pi$  は、SQUID リングの時定数から決まる  $R/L$  よりも低くしなければならないことは当然であるが、RF SQUID の場合は、更に RF バイアス電流の周波数  $\omega_0/2\pi$  に比べても十分に低く設定しなければならない。一方、回路が信号に追従できる速度を表わす最大スルーレートは、磁束ロック法の場合、主としてフィードバック増幅器の積分時定数で制限を受ける。この時定数は  $2\pi/\omega_{AF}$  より十分に長くなくては積分回路にはならない。標準的な SQUID システムには、 $\omega_{AF}/2\pi=50$ [kHz] 程度の変調信号が用いられることが多く、最大スルーレートは  $10^5\Phi_0/s$  程度の値を得ている。

(2) SQUID の特性を決めるパラメータ

SQUID の具体的な構造は、含まれる弱接合の数や型、用いる材料などにより様々である。図 2-19、図 2-20 に幾つかの例を紹介してある。以下、実際に設計

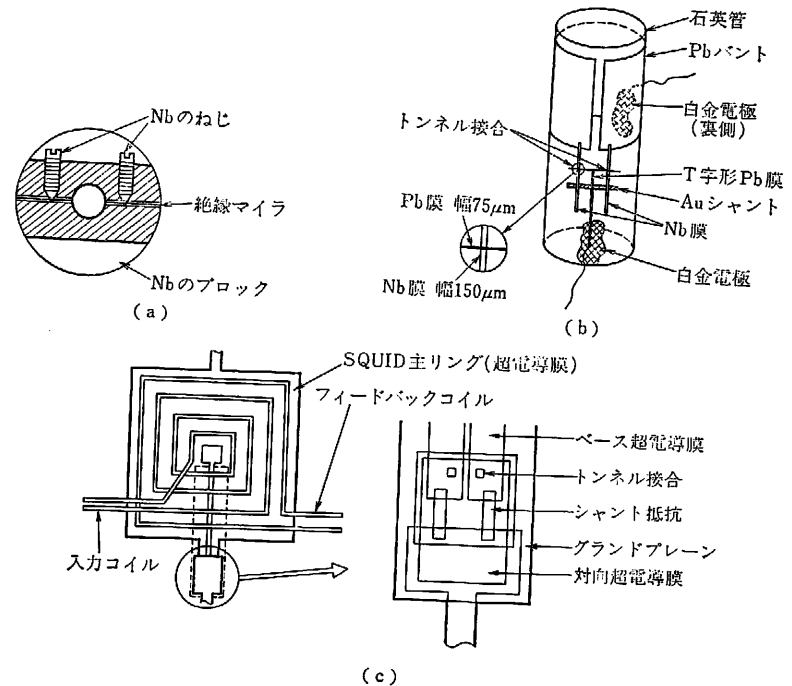


図 2-19 DC SQUID の例