November 25, 2009

担当　明連広昭

超伝導工学レポート2解答例

—ジョセフソン接合　その2—

1. $J_c(y,z) = J_c(\text{一定})$ とおく。$y-z$ 平面において、接合の境界を示す式は、

$$y = a\left(1 - \frac{|z|}{b}\right) \qquad (y \geq 0)$$

$$y = -a\left(1 - \frac{|z|}{b}\right) \qquad (y < 0)$$

したがって、

$$J_c(z) = \int_{-a\left(1-\frac{|z|}{b}\right)}^{a\left(1-\frac{|z|}{b}\right)} J_c dy = 2aJ_c\left(1 - \frac{|z|}{b}\right)$$

となる。接合に流れる全電流は、

$$\begin{aligned} I(B_y^0) &= \int_{-\infty}^{\infty} J_c(z)\sin\left[\frac{2ed'B_y^0}{\hbar}z + \phi(0)\right]dz \\ &= 2\int_0^b 2aJ_c\left(1 - \frac{z}{b}\right)\sin\left[\frac{2ed'B_y^0}{\hbar}z + \phi(0)\right]dz \end{aligned}$$

ここで、$\dfrac{2ed'B_y^0}{\hbar} = \alpha, \phi(0) = \phi$ とおいて

$$\begin{aligned} I(B_y^0) &= 4aJ_c\int_0^b\left(1 - \frac{z}{b}\right)\sin(\alpha z + \phi)dz \\ &= 4aJ_c\int_0^b\left(1 - \frac{z}{b}\right)\left[-\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha z + \phi)\right]' dz \\ &= 4aJ_c\left\{\left[\frac{1}{\alpha}\left(\frac{z}{b} - 1\right)\cos(\alpha z + \phi)\right]_0^b - \frac{1}{b\alpha}\int_0^b\cos(\alpha z + \phi)dz\right\} \\ &= 4aJ_c\left\{\frac{1}{\alpha}\cos\phi - \frac{1}{b\alpha^2}\left[\sin(\alpha z + \phi)\right]_0^b\right\} \\ &= 4aJ_c\left[\frac{1}{\alpha}\cos\phi - \frac{1}{b\alpha^2}\sin(\alpha b + \phi) + \frac{1}{b\alpha^2}\sin\phi\right] \\ &= 4aJ_c\left[\frac{1}{\alpha}\cos\phi - \frac{1}{b\alpha^2}(\sin\alpha b\cos\phi + \cos\alpha b\sin\phi) + \frac{1}{b\alpha^2}\sin\phi\right] \\ &= 4aJ_c\left[\frac{1}{\alpha}\cos\phi\left(1 - \frac{1}{b\alpha}\sin\alpha b\right) + \frac{1}{b\alpha^2}\sin\phi(1 - \cos\alpha b)\right] \\ &= 4aJ_c\left[\frac{1}{\alpha}\cos\phi\left(1 - \frac{1}{b\alpha}\sin\alpha b\right) + \frac{2}{b\alpha^2}\sin\phi\sin^2\frac{\alpha b}{2}\right] \end{aligned}$$

$\phi = \phi(0) = \pm\frac{\pi}{2}$ で接合に流れる全電流は最大となるので、$\sin\phi = \pm 1, \cos\phi = 0$ として

$$
\begin{aligned}
I_c(B_y^0) &= \left| \frac{8aJ_c}{b\alpha^2} \sin\phi \sin^2 \frac{\alpha b}{2} \right| \\
&= \frac{8aJ_c}{b\alpha^2} \sin^2 \frac{\alpha b}{2} \\
&= 2abJ_c \frac{\sin^2 \frac{\alpha b}{2}}{\left(\frac{\alpha b}{2}\right)^2} \\
&= 2abJ_c \frac{\sin^2\left(\frac{bed'B_y^0}{\hbar}\right)}{\left(\frac{bed'B_y^0}{\hbar}\right)^2}
\end{aligned}
$$

接合を通過する全磁束 Φ は $\Phi = 2bd'B_y^0$ であるので、

$$
I_c(B_y^0) = 2abJ_c \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2}
$$

が得られる。

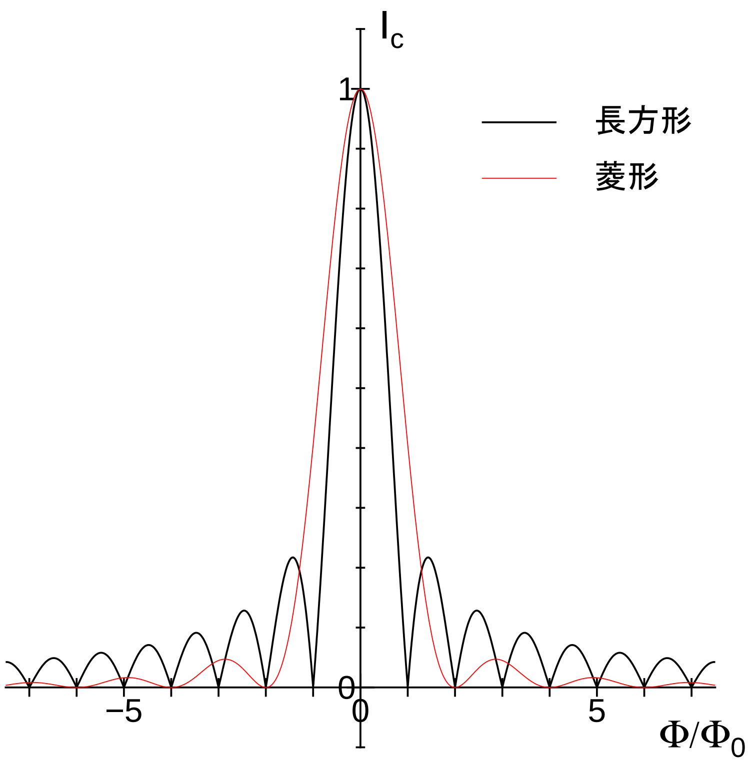

図 1: 超伝導トンネル接合の接合の臨界電流の磁場依存性。